image
not
available



ARCHIV

der

MATHEMATIK und PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Sechzehnter Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.
(H. Ehlers & Co.)

1898.

Inhalts-Verzeichniss
des sechzehnten Teils.

Nr. der Abhandlung | Heft. | Seite.

Integralrechnung.

Geometrie der Ebene.

Geometrie des Raumes.

Trigonometrie.

Mechanik.

Erd- und Himmelskunde.

Litterarische Berichte.

LXIV. Mansion (g. eucl. et non e.) Korn (Grav. elektr. E.) Dellingshausen (kin. Naturl.) Frolov (dém. th. par.) Fink (Geom. d. Eb.) Schüller (Ar. Alg.) Ganter (an. Geom.) Doehlemann (proj. G.) Korteweg (trill. hoog. o.) Bäcklund (sol. kr. rör.) Schouten (versnell. h. o.) Klimpert (Hydrod.) Molenbroek (quat. mech.) Nédélec (c. vect.) Schroeder (phot. opt.) Schlemüller (Schall.). Jssaly, (opt. géom.) Wind (magn. opt.)

Berichtigungen

im 16. Teile.

Seite 274 Zeile 7 v. o. statt $p_3 = \pm p_1$ setze $p_2 = \pm p_3$
12 „ c_3 „ x_3
14 „ Geraden setze Gerade
5 v. u. statt $p_1 \xi_3 \xi_2$ setze $p_2 \xi_3 \xi_1$

Seite 275 Zeile 3 v. u. statt des 𝔎 . . . setze eingeschriebenen 𝔎 . . .
statt des 𝔖 . . . setze die Strahlen des 𝔖 . . .

Seite 276 Zeile 5 v. u. statt dem setze den
Seite 278 Zeile 4 v. o. statt x_5 setze x_3
Seite 278 Zeile 16 v. u. statt x_7 setze x_1
Seite 279 Zeile 5 v. o. statt 𝔖gg setze 𝔖jg
Zeile 8 v. o. statt diejenige setze derjenige
Seite 280 Zeile 5 v. u. statt $p\varepsilon$ setze $p\ddot{i}$
Seite 281 Zeile 10 v. o. statt 7—8 setze 277
Seite 282 Zeile 13 statt $A_1 A_2$ setze $A_2 A_3$
Seite 282 Zeile 22 statt T setze Γ
Seite 282 Zeile 22 statt punkt setze büschel
Seite 283 Zeile 18 statt z setze x
Seite 283 Zeile 26 statt (11) setze $(11)_3$
Seite 286 Zeile 6 statt C setze E

Seite 287 Seite 4 v. o. lautet: $\frac{s_2^2 - s_3^2}{\xi_1} + \frac{s_3^2 - s_1^2}{\xi_2} + \frac{s_1^2 - s_2^2}{\xi_3} = 0$

Seite 287 Zeile 6 v. o. statt $\frac{1}{s_3 - s_3^2}$ setze $\frac{1}{s_1^2 - s_2^2}$

Seite 287 Zeile 4 v. u. statt ε_2 setze ε_1

Seite 288 Zeile 5 v. o. statt Sig setze Sgp.

Seite 288 Zeile 7 v. o. statt 1 : 2 setze 2 : 1

Seite 288 Zeile 10 v. u. statt innere Aehnlichkeit setze innern Aehnlichkeitspunkt.

Seite 288 Zeile 4 v. u. statt laufender setze laufenden

Seite 289 Zeile 15 v. u. statt a_4 setze a'_4

Seite 289 Zeile 1 v. u. statt A_{13} setze A_{12}

Seite 291 Zeile 4 v. ob. statt $-p_3\xi_3$ setze $p_3\xi_3$

Seite 291 Zeile 7 v. o. hinzuzufügen $= 0$

Seite 291 Zeile 11 v. u. statt $+p_3$ setze $: p_3$

Seite 292 Zeile 1 v. ob. statt $\frac{q_3}{q_1}$ setze $\frac{q_3}{q_1}$

Seite 292 Zeile 3 v. o. statt $+$ setze $:$ (2mal)

Seite 292 Zeile 9 v. u. statt $\cos A_1$ setze $\sin A_1$

Seite 293 Zeile 4 v. u. statt 2(4 setze 17)

Seite 293 Zeile 4 v. u. statt $x_2 x_1$ setze $x_3 x_1$

Seite 293 Zeile 4 v. u. statt $x_1 x_3$ setze $x_1 x_2$

Seite 294 Zeile 17 v. ob. statt p_2^4 setze p_2^2

Seite 294 Zeile 3 v. u. statt einem bei A_4 setze einem

Seite 296 Zeile 18 v. ob., die letzteren statt letzteren

Seite 296 Zeile 10 v. u. statt U und V setze x und y

Seite 296 Zeile 2 v. u. statt 45 setze 15

Seite 297 Zeile 3 v. ob. statt Die in 2 setze Je 2

Seite 300 Zeile 1 v. ob. statt P setze P'

Seite 300 Zeile 15 v. o statt $+R'S$ setze $\pm R'S$

Seite 300 Zeile 17 v. o. statt QQ setze QQ'

Seite 301 Zeile 12 v. ob. statt $\xi_3 = 0$ setze $\xi_2 = 0$

Seite 302 Zeile 4 v. u. hinzuzufügen (s. S. 277)

Seite 303 Zeile 9 v. o. vor $\frac{x_3}{n_u}$ setze $+\frac{x_3}{n_2}(x_1 - x_2 + x_3)$

Seite 304 Zeile 2 v. ob. hinzuzufügen $= 0$

Seite 306 Zeile 2 v. u. statt die variabelen setze und variabeln

Seite 307 Zeile 15 v. u. statt Leitcurve setze Leitcurve zerfallen.

Seite 307 Zeile 7 v. u. statt S. 31 setze S. 305.
Seite 308 Zeile 2 v. o. statt 3 setze 8!
Seite 308 Zeile 13 v. o. statt $x_3 x_2$ setze $x_3 x_1$
Seite 308 Zeile 14 v. o. statt $\frac{p_1}{p_2} -$ setze $\frac{p_1}{p_2} +$
Seite 311 Zeile 9 v. o. statt ε_1 setze ξ_i
Seite 311 Zeile 6 v. u. statt 8 setze S
Seite 312 Zeile 11 v. o. vor $(x_1 + x_2 - x_3)$ hinzuzufügen $(x_1 - x_2 + x_3)$
Seite 312 Zeile 7 v. u. statt $)p_2 - p_3{}^2)^2$ setze $(p_2 - p_3)^2$
Seite 31 3Zeile 1 v. u. statt $\cot A_3$ setze $+ \cot A_3$
Seite 315 Zeile 5 v. o. statt formed setze forward
Seite 317 Zeile 16 v. u. statt F setze Feuerbachschen
Seite 317 Zeile 12 statt Ferrers setze Ferrers (s. p. 315)
Seite 317 Zeile 10 statt FNU setze FOU
Seite 317 Zeile 8 v. u. statt statt UCS setze UOG
Seite 317 Zeile 8 v. u. statt 3ψ setze $3\psi'$ oder $2R - 3\psi'$
Seite 317 Zeile 3 v. u. statt 40^0 setze 90^0
Seite 319 Zeile 3 v. o. statt dem Berührungspunkt setze dem Berührungspunkte

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Sechszehnter Teil. Erstes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
(H. Ehlers & Co.)

1898.

I.

Beiträge zur Verwendung des freien Integrationsweges.

Von

Th. Christen

in Basel.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, den Cauchy'schen Satz vom freien Integrationsweg, der sich schon lange als enorm fruchtbar erwiesen hat, noch weiter zu verwerten. Die zur Anwendung gelangenden Methoden machen es möglich, entweder die Resultate auf kürzerem und eleganterem Wege abzuleiten, als dies bisher geschehen ist, oder eine Gruppe verwandter Integrale, die sich in verschiedenen Werken zerstreut finden, unter einem einheitlichen Gesichtspunkte zu behandeln, oder endlich neue Integrale zu berechnen und solche, für welche in andern Arbeiten falsche Werte angegeben sind, zu berichtigen.

Den Satz von Cauchy [1]) setze ich in der folgenden Form als bewiesen voraus:

---

1) Zur Entwicklungsgeschichte dieses Theorems vergleiche man folgende Abhandlungen Cauchy's: „Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal“. Oeuv. compl. série. 2 tome VI. pag. 23 „De l'influence que peut avoir sur la valeur d'une intégrale définie l'ordre dans lequel on effectue les intégrations.“ Oeuv. série 2 tome VI page 112. „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires,“ Separatdruck erschienen 1825.

Ist $z = x + iy$ und besteht zwischen x und y irgend eine Relation, nach welcher ein Punkt mit den Coordinaten x und y auf einer geschlossenen Curve liegt, so ist das Integral

$$\int u(z)\, dz$$

ausgedehnt über den ganzen Umlauf der geschlossenen Curve gleich dem Product von $i2\pi$ in die Summe aller „Résidus" der Function $u(z)$, soweit sich dieselben auf Pole beziehen, die vom dem Integrationsweg umschlossen werden.

$$\int u(z)\, dz = i\, 2\pi \sum_{h=1}^{h=n} c_h$$

$$c_h = \lim_{\delta=0} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \delta^{p-1}} \{\delta^p \cdot u(z_h + \delta)\}$$

Die Werte $z_h (h = 1,\ 2 \ldots n)$ sind die vom Integrationsweg umschlossenen Pole von $u(z)$ und p ist bestimmt durch die Bedingung

$$0 < \operatorname{mod} \lim_{\delta=0} \delta^p u(z_h + \delta) < \infty$$

wobei selbstverständlich für $p = 1$

$$c_h = \lim_{\delta=0} \delta \cdot u(z_h + \delta)$$

zu setzen ist.

Es sei noch daran erinnert, dass Cauchy unter

$$\underset{x_1 \quad y_1}{\overset{x_2 \quad y_2}{\mathcal{E}}} ((u(z)))$$

die Summe aller Résidus versteht, deren Pole innerhalb der Grenzen

$$x_1 < x < x_2$$
$$y_1 < y < y_2$$

liegen.

Schliesst der Integrationsweg keinen Pol der Function $u(z)$ ein, so ist das Integral gleich null.

I. Ableitung einiger Integrale, die mit dem Exponentialintegral verwandt sind.

Die Berechung des Exponentialintegrales

$$\varphi(a) = \int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx \tag{1}$$

geschieht durch Reihenentwicklung. Durch Differentiation der Gleichung (1) nach a kommt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = -\frac{e^{-a}}{a} = -\sum_0^\infty{}_h (-1)^h \frac{a^{h-1}}{h!}$$

woraus durch Integration

$$\varphi(a) = \gamma + \log\left(\frac{1}{a}\right) - \sum_1^\infty{}_h \frac{(-a)^h}{a \cdot h!} \tag{2}$$

Für den Wert von $\varphi(a)$ habe ich absichtlich den sonst gebräuchlichen Ausdruck

$$\varphi(a) = -\mathfrak{E}(-a)$$

wobei

$$\mathfrak{E}(z) = C^{1)} + \tfrac{1}{2}\lg(z^2) + \sum_1^\infty{}_h \frac{z^h}{h \cdot h!}$$

vermieden, weil $Ei(z)$ für positive und negative Werte von z eine eindeutig definirte Function ist, während das Glied $\lg\left(\frac{1}{a}\right)$ in Gleichung (2) andeuten soll, dass die Function $\varphi(a)$ für negative Werte von a jegliche Bedeutung verliert, wenn sie, wie hier, durch das bestimmte Integral (1) definirt ist (man müsste dann schon durchaus an dem unglücklichen Begriff der „Valeur principale" festhalten wollen!).

Dass die Constante γ dem negativen Wert der Mascheroni'schen Constante gleich ist, geht aus der folgenden Transformation hervor:

Die Mascheroni'sche Constante [2]) ist definirt als

$$C = \int_0^1 \lg\left(\lg\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^\infty e^{-y}\log y\, dy$$

woraus durch partielle Integration

$$C = -\lim_{\delta=0}\left\{e^{-\delta}\lg\delta + \int_\delta^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dy\right\}$$

und nach (1)

1) Unter C sei durchweg die Mascheronische Constante

$$C = 0,\ 577\ \ 215\ \ 665\ldots$$

verstanden; über deren genauen Wert vergl. Crelles Journ, XLIX pag. 375.

2) **Mascheroni**: Adnotationes ad calc. integ. Euleri (1790) pag. 13.

$$C = -\lim_{\delta=0} \{\log\delta + \varphi(\delta)\} = -\gamma$$

sodass

$$\varphi(a) = \int_a^\infty e^{-x}dx = -C + \lg\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \sum_1^\infty \frac{(-a)^h}{h\,.\,h\,!} \tag{4}$$

Man setze jetzt

$$u(z) = \frac{e^{-az}}{1+z} \tag{5}$$

und nehme als Integrationsweg das unendliche grosse Rechteck $OABC$ (Fig. 1). Innerhalb desselben liegt kein Pol von $u(z)$; das Integral über das Rechteck ist daher gleich null. Die einzelnen Teilintegrale ergeben sich als

$$\int_0^A u\,dz = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x} = e^a\,\varphi(a)$$

$$\int_A^B u\,dz = \lim_{k=\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-a(k+iy)}}{1+k+iy}\,d(iy) = 0$$

$$\int_B^C u\,dz = -\lim_{k=\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-a(x+ik)}}{1+x+ih}\,dx = 0$$

$$\int_C^0 u\,dz = -i\int_0^\infty \frac{e^{-iay}}{1+iy}\,dy$$

und durch Addition kommt

$$0 = e^a\,\varphi(a) - i\int_0^\infty \frac{e^{-iay}}{1+iy} \tag{6}$$

Setzt man

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\cos ay}{1+y^2}\,dy, \quad G(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ay}{1+y^2}\,dy \tag{7}$$

so ergiebt Gleichung (6) nach Trennung des reellen Teiles vom imaginären

$$G + \frac{\partial G}{\partial a} = e^a\,\varphi(a) \tag{8}$$

$$F + \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \tag{9}$$

Die Integration von (9) liefert die längst bekannte Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\cos ay}{1+y^2}\,dy = \int_0^\infty \frac{y \sin ay}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

Von mehr Interesse ist die Differentialgleichung (8), deren Integration [1]), wie man leicht ersieht, auf die Gleichungen

$$G(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ay}{1+y^2}\,dy = \tfrac{1}{2}\{e^{-a}\mathfrak{E}(a) - e^{a}\mathfrak{E}(-a)\} \tag{10}$$

$$\frac{\partial G(a)}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{y \cos ay}{1+y^2}\,dy = -\tfrac{1}{2}\{e^{-a}\mathfrak{E}(a) + e^{a}\mathfrak{E}(-a)\} \tag{11}$$

führt. Die Gleichungen (10) und (11) bleiben für negative Werte von a bestehen, überhaupt sind beide Integrale für alle reellen Werte von a durchaus bestimmt, und deshalb ist die Verwendung der Function $\mathfrak{E}$ die einzig gegebene Beide Gleichungen sind von mehreren Mathematikern gefunden worden, so von Schlömilch [2]), Arndt [3]), Meyer [4]), doch sind die von ihnen angewandten Methoden nicht so einfach.

Im Folgenden kommen die mit $Ei(z)$ verwandten Reihen

$$\mathfrak{C}(z) = C + \tfrac{1}{2}\lg(z^2) + \sum_1^\infty{}_h \frac{(-z^2)^h}{2h\,.\,(2h)!}$$

$$\mathfrak{S}(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^h z^{2h+1}}{(2h+1)\,.\,(2h+1)!}$$

zur Verwendung. Sie dienen zur Berechnung des Sinus- und des Cosinusintegrales. Man beweist leicht, dass

$$\int_a^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = -\,Ci(a) \qquad a > 0 \tag{12}$$

und

---

1) Das vollständige Integral ist

$$G = \gamma\,.\,e^{-a} + \tfrac{1}{2}\{e^{-a}\mathfrak{E}(a) - e^{a}\mathfrak{E}(-a)\}$$

und für $a = 0$ wird $\gamma = 0$.

2) Crelles J. V pag. 204.

3) Ibid. XI pag. 70.

4) Ibid. XLIII pag. 72.

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - Li(a) \tag{13}$$

Die Identität der Constanten des Cosinus- und des Exponentialintegrales hat zuerst Arndt [1]) nachgewiesen, indem er die beiden Integrale von einander subtrahirte und zeigte, dass die Differenz verschwindet, wenn a gleich null gesetzt wird.

Auf die Integrale (12) und (13) lässt sich nun durch eine kurze Rechnung die Function

$$\psi(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx \tag{14}$$

zurückführen. Man setze

$$u(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z} \tag{15}$$

und führe das Integral $\int u dz$ um das Rechteck $OABC$ (Fig. 1.) Es ergiebt sich

$$\int_0^A u dz = \int_0^\infty \frac{\cos ax + i \sin ax}{1+x} dx$$

$$\int_A^B = 0, \quad \int_B^C = 0$$

$$\int_C^0 = -\int_0^\infty \frac{e^{-ay}(y+i)}{1+y^2} dy = -i\psi(a) + \frac{\partial\psi(a)}{\partial a}$$

und durch Addition

$$0 = \psi(a) - \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x} dx$$

$$0 = \frac{\partial\psi(a)}{\partial a} + \int_0^\infty \frac{\cos ax}{i+x} dx$$

Setzt man in beiden Gleichungen

---

1) Grunert's Archiv X pag 225.

$$x = \frac{y}{a} - 1$$

so erhält man mit Hilfe von (12) und (13)

$$\left.\begin{aligned} \psi(a) &= \int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{1+y^2} dy = \cos a \left\{\frac{\pi}{2} - Li(a)\right\} + \sin a\, \mathfrak{C}i(a) & (16) \\ -\frac{\partial \psi(a)}{\partial a} &= \int_0^\infty \frac{y e^{-ay}}{1+y^2} dy = -\cos a\, \mathfrak{C}(a) + \sin a \left\{\frac{\pi}{2} - \mathfrak{S}(a)\right\} & (17) \end{aligned}\right\} a > 0$$

Zu gleichen Resultaten kommt Schlömilch [1]) auf folgende Art: Man liest direct aus Gleichung (14) ab, dass

$$\frac{\partial^2 \psi(a)}{\partial a^2} + \psi(a) = \frac{1}{a}$$

Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung ist

$$\psi(a) = \{A - \mathfrak{S}(a)\} \cos a + \{B + \mathfrak{C}(a)\} \sin a$$

Nun stösst aber der exacte Beweis dafür, dass

$$B = 0$$

auf erhebliche Schwierigkeiten, sodass diese anscheinend sehr einfache Ableitung schliesslich doch bedeutend complicirter ausfällt, als die oben angeführte.

II. Integrale von 0 bis ∞ über algebraisch-trigonometrische Functionen.

Es soll zuerst eine allgemeine Integrationsformel abgeleitet werden, umfassend alle Functionen $u(z)$ welche der Bedingung

$$\lim_{k=\infty} k \cdot e^{i\vartheta} \cdot u(ke^{i\vartheta}) = A \tag{18}$$

genügen, wobei A endlich und von ϑ unabhängig sein muss, solange ϑ zwischen den Grenzen 0 und π bleibt Ferner darf $u(z)$ für keinen reellen Wert des Argumentes z unendlich gross werden. Führt man unter diesen Voraussetzungen das Integral $\int u dz$ um das unendlich grosse Rechteck $ABCD$, so wird

1) Crelles J. XXXIII pag. 325.

$$\int u\,dz = i\,2\pi \underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathfrak{E}_{0}^{\infty}\,((\,u(z)\,)) \tag{19}$$

Die Längen OB und BC sind beliebig verschieden, beide aber unendlich gross; sie seien k und $\varkappa$; dagegen ist vorausgesetzt, dass

$$AO = CB = DP = PC = k$$

Dann wird

$$\int_A^B = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx, \qquad \int_B^C = i\int_0^k u(k+iy)\,dy$$

$$\int_C^D = -\int_{-k}^{k} u(x+ik)\,dx, \qquad \int_D^A = -\,i\int_0^k u(-k+ly)\,dy$$

und nach (18)

$$\int_B^C + \int_D^A = iA\int_0^k \left\{\frac{1}{k+iy} + \frac{1}{k-iy}\right\} dy$$

$$\int_C^D = -\,A\int_0^k \left\{\frac{1}{x+i\varkappa} - \frac{1}{x-i\varkappa}\right\} dx$$

woraus durch Addition

$$\int_B^C + \int_C^D + \int_D^A = i2A\left\{\pi - \operatorname{arctg}\frac{k}{\varkappa} - \operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{k}\right\}$$

bekanntlich gilt aber für positive x

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

sodass

$$\int u\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx + i\pi A$$

woraus man mit Hilfe von (19) erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx = i\pi\left\{2 \underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathfrak{E}_{0}^{\infty}\,((\,u(z)\,)) - A\right\} \tag{20}$$

Stellt man ferner an die Function u die Forderung

$$u(-x) = u(x) \tag{18a}$$

so kommt aus (20)

$$\int_0^{\infty} u(x)\,dx = i\pi \left\{ \mathop{E}_{-\infty}^{\infty} \mathop{}_{0}^{\infty} ((\,u(z)\,)) - \tfrac{1}{2}A \right\} \text{[1]} \tag{21}$$

Eine grosse Zahl algebraisch-trigonometrischer Integrale lassen sich aus dieser Gleichung (21) ableiten. Es sei vorausgeschickt, dass die hier zur Behandlung kommenden Integrale sämtlich den Nenner

$$e^q + e^{-q} - 2\cos px$$

enthalten. Setzt man an dessen Stelle den anderen

$$1 - 2\alpha\cos px + \alpha^2$$

so liegt darin keine principielle Aenderung. Dagegen wird sich zeigen, dass bei Anwendung der zweiten Form die Integrale durch zwei verschiedene analytische Ausdrücke dargestellt werden müssen, jenachdem $\alpha^2 \gtrless 1$ ist. Diejenigen unter ihnen, die bereits von Anderen gefunden worden sind, werden auch überall doppelt aufgeführt für $\alpha^2 > 1$ und für $\alpha^2 < 1$. Um beide Fälle zugleich behandeln zu können, wähle ich die erste Form des Nenners, aus welchen die zweite dadurch hergestellt wird, dass man die Gleichung mit $e^{\pm q}$ multiplicirt, jenachdem $\alpha^2 \lessgtr 1$ sein soll. Es mögen endlich in diesem Abschnitt zur Vereinfachung die folgenden Bezeichnungen festgehalten werden

$$p = 2\pi a > 0, \quad q = 2\pi b > 0, \quad r = e^q + e^{-q}$$

1. Die Reihe

$$\sum_{x=4}^{x=\infty} \frac{1}{x^2 + b^2}$$

wird summirt durch Auswertung des Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{r - 2\cos x} \cdot \frac{dx}{x}$$

---

[1] Diese Relation hat auf andere Art bereits Cauchy nachgewiesen; er bringt sie in seiner Abhandlung „Sur quelques relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies.“ Oeuvres compl. série 2 tome VI pag. 124.

Die Pole der Function

$$u(z) = \frac{\sin z}{r - 2\cos z} \cdot \frac{1}{z} \tag{22}$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$r - 2\cos z = 0$$

Da nur die Pole mit positivem imaginärem Teil in Betracht kommen, so sind dieselben enthalten in

$$z_\varkappa = 2\pi(\varkappa + ib)$$

worin $\varkappa$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft. Dann wird

$$c_\varkappa = \frac{\sin z_\varkappa}{z_\varkappa} \cdot \lim_{z = z_\varkappa} \frac{z - z_\varkappa}{r - 2\cos z} = \frac{1}{2 z_\varkappa}$$

$$c_0 = \frac{-i}{4\pi b}, \quad c_\varkappa = \frac{1}{4\pi(\varkappa + ib)}, \quad c_{-\varkappa} = \frac{-1}{4\pi(\varkappa - ib)}$$

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{-\infty}^{\infty}\,{}_{0}^{\infty}((u)) = \frac{-i}{4\pi}\left\{\frac{1}{b} + 2b \mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2 + b^2}\right\}$$

Ferner ist

$$A = \lim_{k = \infty} \frac{\sin(k \,.\, e^{i\vartheta})}{r - 2\cos(k e^{i\vartheta})} = -\frac{i}{2}$$

und nach (21), wenn $z = py$

$$\int_0^\infty \frac{\sin py}{e^q + e^{-q} - 2\cos py} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{1}{4}\left\{-\pi + \frac{1}{b} + 2b \sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa^2 + b^2}\right\} \tag{23}$$

Dieses Integral hat Plana [1]) nach einer anderen Methode berechnet, die ich kurz andeuten will. Es ist

$$x \,.\, u(x) = \frac{e^{-q}\sin x}{(1 - e^{-q + ix})(1 - e^{-q - ix})} = \sum_1^\infty e^{-\varkappa q} \sin \varkappa x$$

$$\int_0^\infty u(x)\, dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{e^q - 1} \tag{23a}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (23), so erhält man

---

1) Mem. della reale acad. della science di Torino 1818 pag. 30.

$$\frac{1}{b} + 2b \sum^{\infty}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa^2 + b^2} = \pi \frac{e^{\pi b} + e^{-\pi b}}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \tag{24}$$

Diese ist eine bekannte Reihe, sie entspricht für imaginäre Werte von b der Reihe für die Cotangente

$$b = ia$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi a = \frac{1}{a} - 2a \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2 - a^2} \tag{24a}$$

Aus (24) leitet man leicht die verwandte Reihe

$$\frac{1}{b} + 2b \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa}}{\varkappa^2 + b^2} = \frac{2\pi}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \tag{25}$$

ab, die später Verwendung finden wird.

2. Es sei

$$u(z) = \frac{\sin pz}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{z}{1 + z^2}$$

Die Pole, deren Résidus unter die Summe $\underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathfrak{E}_{0}^{\infty}((u))$ fallen, sind

$$az_{\varkappa} = \varkappa + cb$$

und

$$z' = i$$

Sind die entsprechenden Résidus $c_{\varkappa}$ und c', so ist

$$\underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathfrak{E}_{0}^{\infty}((u)) = c' + c_0 + \sum_{1}^{\infty}(c_{\varkappa} + c_{-\varkappa})$$

Berechnet man die einzelnen Résidus und definirt

$$F(\varkappa, b, a) = \frac{\varkappa^2 + b^2 - a^2}{\varkappa^4 + 2(b^2 + a^2)\varkappa^2 + (b^2 - a^2)^2} \tag{26}$$

so geht (25) über in

$$\underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathfrak{E}_{0}^{\infty}((u)) = -\frac{i}{4\pi}\left\{\pi \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}} + \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_{1}^{\infty} F(\varkappa, b, a)\right\}$$

endlich ist

$$A = \lim_{k=\infty} \frac{\sin(pke^{i\vartheta})}{r - 2\cos(pke^{i\vartheta})} = -\frac{i}{2}$$

sodass nach (21)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{1 + x^2} = \tfrac{1}{4}\left\{\pi \frac{e^q + e^{-q} - 2e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}} + \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_{1}^{\infty} F(\varkappa, b, a)\right\} \tag{27}$$

Ueberträgt man die von Plana benutzte Methode auf dieses Integral, so kommt

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi/2}{e^{p+q}-1} \tag{27a}$$

Diese Gleichung liefert mit (27) zusammen die Summe der Reihe:

$$\frac{b}{b^2-a^2} + 2b\sum_1^\infty F(\varkappa, b, a) = \pi\,\frac{e^q - e^{-q}}{e^q + e^{-q} - e^p - e^{-p}} \tag{28}$$

Die Entwicklungen der Paragraphen 1. und 2. dienten dazu, die Summenformeln (24) und (28) abzuleiten; in den folgenden Abschnitten werden auf Grund der genannten Formeln weitere Integrale berechnet. Aus (28) erhält man für $b = 0$ (nachdem man vorerst durch b dividirt hat.)

$$\sum_1^\infty \frac{\varkappa^2 - a^2}{(\varkappa^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)^2\right\} \tag{28a}$$

und mit Hülfe von (24)

$$\sum_1^\infty \frac{\varkappa^2}{(\varkappa^2+a^2)^2} = \left(\frac{\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)^2 \cdot \left\{\frac{e^{2\pi a} - e^{-2\pi a}}{4\pi a} - 1\right\} \tag{29}$$

und

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(\varkappa^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left\{\left(\frac{\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{e^{2\pi a} - e^{-2\pi a}}{4\pi a}\right) - \frac{1}{2a^2}\right\} \tag{30}$$

Für das hier berechnete Integral (27a) giebt die Láska'sche Sammlung [1]) einen falschen Wert an, indem dort steht

$$\int_0^\infty \frac{\sin rx}{1 - 2p\cos rx + p^2} \cdot \frac{x\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{rq}}{(1+p)(e^{2qr} - p)} \qquad p < 1$$

mit Angabe der Quelle „Legendre Exerc. 4, 132". Ebenso ist der Fall $p > 1$ nach Ohm [2]) falsch citirt. Die beiden angeführten Stellen enthalten das Integral so, wie es sich aus meiner Formel (27a) ergiebt, wenn man dieselbe mit $e^{\pm q}$ multiplicirt und die Substitution

---

1) Dr. O. Láska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik pag, 254, 111.

2) Ohm, Auswertungsmethoden bestimmter Integrale pag. 161.

$$x = \frac{y}{s}$$

$$p = s \cdot p'$$

einführt. Ebenso muss die Formel 101 auf pag 253. des genannten Buches corrigirt werden, indem für den Fall $p > 1$ in den Nenner nicht $1 - p$, sondern $p - 1$ zu stehen kommt. Man vergleiche meine Formel (23a), indem man in derselben beiderseits im Nenner mit e^q multiplicirt.

Ueber die Summen (29) und (30) sei noch bemerkt, dass aus ihnen durch Differentiation nach a die Summen

$$\sum_1^\infty \frac{\varkappa^{2m}}{(\varkappa^2 + a^2)^n} \qquad m < n$$

bis zu beliebig hohen Werten von m und n berechnet werden können.

3. Die drei Functionen

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{1}{1 + z^2} \\ u_2 &= \frac{\cos pz}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{1}{1 + z^2} \\ u_3 &= \frac{1 - e^{\gamma q}\cos pz}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{1}{1 + z^2}, \quad \gamma = \pm 1 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

liefern die Integrale

$$J_1 = \int_0^\infty u_1(x)\,dx, \quad J_2 = \int_0^\infty u_2(x)\,dx, \quad J_3 = \int_0^\infty u_3(x)\,dx$$

von denen das dritte leicht nach der Plana'schen Methode berechnet wird, zugleich aber auch direct aus J_1 und J_2 sich ergiebt und daher für diese eine Controle liefert.

Alle drei Functionen haben die nämlichen Pole:

$$z' = i$$

$$az_\varkappa = \varkappa + ib \qquad -\infty < \varkappa < \infty$$

Eine weitere gemeinsame Eigenschaft ist

$$A = 0$$

Für alle drei gilt daher

$$J = i\pi \left\{c' + c_0 + \sum_1^\infty (c_\varkappa + c_{-\varkappa})\right\}$$

Für u_1 erhält man

$$c' = \frac{i}{2} \frac{1}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}}$$

$$c_0 + \sum_1^\infty (c_\varkappa + c_{-\varkappa}) = -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty F(\varkappa, a, b) \right\}$$

man vergleiche die Definition (26) und berechne die Summe über $F(\varkappa, a, b)$ nach (28), indem dort a und b und dementsprechend p mit q zu vertauschen ist.

Für u_2 berechnet man

$$c' = \frac{i}{4} \frac{e^p + e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}}$$

$$c_0 + \sum_1^\infty (c_\varkappa + c_{-\varkappa}) = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty F(\varkappa, a, b) \right\}$$

und mit Hilfe von (28) wird jetzt

$$J_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^{p+q} + 1}{e^{p+q} - 1}$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^p + e^q}{e^{p+q}}$$

$$J_3 = J_1 - e^{\gamma q} J_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\gamma q}}{1 - e^{\gamma(p+q)}}$$

Alle drei Integrale lassen sich noch etwas verallgemeinern, wenn man $\frac{x}{s}$ an Stelle von x und $p \,.\, s$ an Stelle von p setzt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps+q} + 1}{e^{ps+q} - 1} \qquad (32)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps} + e^q}{e^{ps+q} - 1} \qquad (33)$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{\gamma q} \cos px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{\gamma q}}{1 - e^{\gamma(ps+q)}}, \quad \gamma = \pm 1 \qquad (34)$$

Das Integral (32) hat bereits Bigler[1]) berechnet und zwar eben-

1) Grunert's Archiv, 2. Reihe IX pag. 81.

falls nach den Methoden der Veränderung des Integrationsweges, wenngleich auf etwas andere Art. Gleichung (34) indessen stimmt überein mit einem Resultate, welches viel früher schon Boncompagni [1]) gefunden hat nach der Plana'schen Methode: Man beweist leicht, dass

$$\frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}=\sum_1^\infty \alpha^x \cos xpx$$

wonach

$$\int_0^\infty \frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}\frac{dx}{s^2+x^2}=\frac{\pi}{2s}\sum \alpha^x e^{-xps}=\frac{\pi}{2s}\frac{1}{1-\alpha e^{-ps}}$$

Dieses Resultat unterliegt jedoch der Beschränkung

$$\alpha^2<1$$

weil die Reihe $\Sigma\alpha^x\cos xpx$ divergirt, sobald α^2 die Grenze 1 erreicht. Dagegen hätte Boncompagni leicht auch den Wert des Integrals für $\alpha^2>1$ finden können, wenn er an Stelle seiner Reihe die andere

$$\frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}=-\sum_1^\infty\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x\cos xpx \qquad \alpha^2>1$$

verwendet hätte; man erhält mit deren Hilfe [2])

$$\int_0^\infty \frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}\cdot\frac{dx}{s^2+x^2}=-\frac{\pi}{2s}\cdot\frac{1}{\alpha e^{ps}-1} \qquad \alpha^2>1$$

Ein anderes bekanntes Integral leitet man aus (34) ab, indem man dort $e^{\gamma q}=\frac{1}{\sigma}$ setzt und nach σ integrirt:

$$\int_0^\infty \log\{1-2\sigma\cos px+\sigma^2\}\cdot\frac{dx}{s^2+x^2}=\frac{\pi}{s}\lg\{C\cdot(\sigma-e^{\gamma ps})\},$$

$$\gamma=\pm 1 \text{ jenachdem } \sigma^2 \lessgtr 1$$

Es ist zu erwarten, dass C zwei verschiedene Werte hat, jenachdem $\sigma \gtrless 1$. Es sei $\sigma<1$, $\gamma=1$, so findet man für

$$\sigma=0$$

---

1) Crelle's J. XXV, pag. 93.

2) Ohm, Auswertungsmethoden etc. § 26.

$$0 = \frac{\pi}{s}\lg\{-Ce^{ps}\}, \quad C = -e^{-ps}$$

$$\int_0^\infty \lg\{1 - 2\sigma\cos px + \sigma^2\} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{s}\lg(1 - \sigma e^{-ps}), \quad \sigma^2 < 1 \quad (35)$$

Von dieser Gleichung subtrahire man die Identität

$$\int_0^\infty \lg(\sigma^2) \cdot \frac{dx}{s^6+x^2} \qquad = \frac{\pi}{s}\lg\sigma$$

so ergiebt sich, wenn man $\frac{1}{\sigma}$ durch τ ersetzt,

$$\int_0^\infty \lg\{1 - 2\tau\cos px + \tau^2\} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{s}\lg(\tau - e^{-ps}), \quad \tau^2 > 1 \quad (35a)$$

Eine ganze Serie weiterer Integrale lässt sich aus den Gleichungen (32) und (33) ableiten Es wurde schon einmal die bekannte Reihe

$$\frac{\sin px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} = \sum_1^\infty e^{-\varkappa q}\sin\varkappa px \quad (36)$$

citirt. Nach dieser Reihe entwickle man die linken Seiten der Gleichungen (32) und (33), die rechten dagegen nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \Sigma\varkappa x^\varkappa \qquad x^2 < 1$$

beide nach Potenzen von e^{-q}. Man überzeugt sich leicht, dass beide Reihen unbedingt convergent sind; die Coefficienten gleicher Potenzen von e^{-q} müssen daher alle links und rechts übereinstimmen.

Die Berechnung der Coefficienten führt auf die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2\varkappa+1)px}{\sin px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps} + e^{-ps} - 2e^{-(2\varkappa+1)ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \quad (37)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\varkappa px}{\sin px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{2 - 2e^{-2\varkappa ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \quad (38)$$

$$\int_0^\infty \sin(2\varkappa+1)px \cdot \operatorname{ctg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{2 - (e^{ps} + e^{-ps})e^{-(2\varkappa+1)ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \quad (39)$$

$$\int_0^\infty \sin 2\varkappa px \operatorname{ctg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}+e^{-ps}}{e^{ps}-e^{-ps}}\{1-e^{-2\varkappa ps}\} \tag{40}$$

Von diesen Gleichungen finden sich (37) und (38) bei Legendre [1]) und Cauchy [2]).

Zwei weitere bemerkenswerte Integrale liefert die Addition resp. Subtraction der Gleichungen (32) und (33):

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 \frac{px}{2}}{e^q+e^{-q}-2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{4s} \cdot \frac{1}{1-e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps}+1}{e^{ps+q}-1} \tag{41}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{px}{2}}{e^q+e^{-q}-2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{4s} \cdot \frac{1}{1+e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps}-1}{e^{ps+q}-1} \tag{42}$$

Anstatt aus diesen Gleichungen durch Reihenentwicklung, wie aus (32) und (33), neue abzuleiten, kann man einfacher verfahren, indem man unter den Gleichungen (37) — (40) die entsprechenden addirt oder subtrahirt.

Die Additionen (37) + (39) und (38) + (40) ergeben keine neuen Gleichungen, sondern bloss Specialfälle der Gleichung (40). Dagegen erhält man durch die Subtractionen (37) — (39) und (38) — (40), nachdem man noch $2p$ an Stelle von p gesetzt hat,

$$\int_0^\infty \sin(4\varkappa+2)px \cdot \operatorname{tg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}-e^{-ps}}{e^{ps}+e^{-ps}} \cdot \{1+e^{-(4\varkappa+2)ps}\} \tag{43}$$

$$\int_0^\infty \sin 4\varkappa px \cdot \operatorname{tg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = -\frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}-e^{-ps}}{e^{ps}+e^{-ps}} \cdot \{1-e^{-4\varkappa ps}\} \tag{44}$$

Die Natur des Integrals (42) gestattet (im Gegensatz zu den anderen Integralen dieses Abschnittes) $s=0$ zu setzen:

---

1) Exerc. 5. 36.

2) Sav. Etr. 1827 pag. 1; vergl. auch Liebrecht „Ueber einige best. Int." Grunert's Archiv LIX pag. 218.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{e^q - e^{-q}} \tag{45}$$

Doch scheint es mir aus verschiedenen Gründen wünschenswert, dass für die Formel (45) noch ein besonderer Beweis erbracht werde.

Es sei daher

4.

$$u(z) = \frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{r - 2\cos z} \cdot \frac{1}{z^2}$$

Hier ist $A = 0$

Die Pole sind

$$z_\varkappa = 2\pi(\varkappa + ib), \qquad -\infty < \varkappa < \infty$$

$$i\pi \mathop{E}_{-\infty\;\;0}^{\infty\;\;\infty} ((u)) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^q - 1}{e^q + 1} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot \left\{\frac{1}{b^2} - 2\sum_1^\infty \frac{(\varkappa^2 + b^2)^2}{\varkappa^2 - b^2}\right\}$$

und nach (28a)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos x} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}}$$

woraus man (45) erhält, indem man px an Stelle von x setzt.

Entwickelt man jetzt auch Gleichung (45) links in die Reihe (36) und rechts in die geometrische Reihe und vergleicht die Coefficienten gleich hoher Potenzen von e, so kommt

$$\int_0^\infty \sin(4\varkappa + 2)px . \mathrm{tg}\; px . \frac{dx}{x^2} = \pi . p \tag{46}$$

$$\int_0^\infty \sin 4\varkappa px . \mathrm{tg}\, px . \frac{dx}{x^2} = 0 \tag{47}$$

Wie zu erwarten war, erweisen sich diese Gleichungen als übereinstimmend mit (43) und (44).

Für $\varkappa = 0$ liefert Gleichung (46)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 px}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} p \tag{48}$$

Aus (47) kommt für $\varkappa = 1$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 px}{x^2}\, dx - \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2}\, dx = 0$$

dazu giebt (48)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 px}{x^2}\, dx + \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot p$$

sodass

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 px}{x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} p \tag{49}$$

Jetzt setze man $\varkappa = 1$ in (46) und löse $\sin 6px$ auf nach Potenzen von $\sin px$ und $\cos px$. Benützt man dazu die beiden Gleichungen (49), so kommt

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin^6 px}{x^2}\, dx &= \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^4 px}{x^2}\, dx = \frac{3\pi}{16} \cdot p \\ \int_0^\infty \frac{\sin^4 px \cos^2 px}{x^2}\, dx &= \frac{\pi}{16} \cdot p \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Analog findet man weiter

$$\int_0^\infty \frac{\sin^8 px}{x^2}\, dx = \frac{5\pi}{16} \cdot p, \quad \text{etc. etc.} \tag{51}$$

Nach dieser Methode berechnet man successive eine beliebige Anzahl Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \sin^{2m} px \cdot \cos^{2n} px \cdot \frac{dx}{x^2} \qquad \begin{aligned} m &= 1, 2, 3 \ldots \\ n &= 0, 1, 2 \ldots \end{aligned} \tag{52}$$

5. Durchaus analoge Relationen bestehen für die Function

$$u(z) = \frac{\sin \frac{z}{2}}{r - 2\cos z} \cdot \frac{z}{2} \tag{53}$$

Es wird

$$A = 0$$

die Pole sind

$$z_\varkappa = 2\pi(\varkappa + ib)$$

$$\Sigma c_\varkappa = -\frac{i}{4\pi}\frac{1}{e^{\pi b} + e^{-\pi b}}\left\{\frac{1}{b} + 2b\sum_1^\infty \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa^2 + b^2}\right\}$$

und nach (25), wenn man noch x durch $p \cdot x$ ersetzt,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{e^q - e^{-q}} \tag{54}$$

Hieraus ist weiter

$$\sum_1^\infty e^{-\varkappa q}\int_0^\infty \frac{\sin 2\varkappa px}{\cos px} \cdot \frac{dx}{x} = \pi\sum_1^\infty e^{-(2\varkappa+1)q}$$

und, weil beide Reihen unbedingt convergiren,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(4\varkappa + 2)px}{\cos px}\frac{dx}{x} = \pi \tag{55}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 4\varkappa px}{\cos px}\frac{dx}{x} = 0 \tag{56}$$

Vergleicht man die beiden letzten Gleichungen mit (46) und (47), so sieht man leicht ein, dass allgemein gelten muss

$$\int_0^\infty \sin^{2m+1}px \cdot \cos^{2n}px \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{p}\int_0^\infty \sin^{2m+2}px\cos^{2n}px \cdot \frac{dx}{x^2} \tag{57}$$

$$m = 0, 1, 2 \ldots \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

6.

$$u(z) = \frac{\cos\frac{pz}{2}}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{1}{1 + z^2} \tag{58}$$

$$A = 0$$

Der Integrationsweg umschliesst zweierlei Pole

$$z' = i$$

und

$$az_\varkappa = \varkappa + ib$$

$$c' = \frac{i}{4} \cdot e^p \cdot \frac{e^{p/2} + e^{-p/2}}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

$$c_\varkappa = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^\varkappa}{e^{q/2} - e^{-q/2}} \cdot \frac{a}{a^2 + (\varkappa + ib)^2}$$

$$\Sigma c_\varkappa = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{1}{e^{q/2} - e^{-q/2}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty (-1)^\varkappa F(\varkappa, a, b) \right\}$$

Nun ist nach 28)

$$\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty \varkappa\, F(\varkappa, a, b) = \pi \frac{e^{2p} - 1}{(e^p - e^q)\,(e^p - e^{-q})}$$

Beachtet man ferner, dass

$$F\left(\varkappa, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 4\, F(2\varkappa, a, b)$$

so erhält man, wenn für a und b (und dem entsprechend für p und q) ihre halben Werte gesetzt werden,

$$\frac{2a}{a^2 - b^2} + 4a \sum_1^\infty \varkappa\, F(2\varkappa, a, b) = \pi \frac{e^p - 1}{(e^{p/2} - e^{q/2})\,(e^{p/2} - e^{-q/2})}$$

Subtrahirt man die erste dieser beiden Summengleichungen von der zweiten, so kommt

$$\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty \varkappa (-1)^\varkappa F(\varkappa, a, b) = \pi \cdot e^p \frac{(e^{p/2} - e^{-p/2})\,(e^{q/2} + e^{-q/2})}{(e^p - e^q)\,(e^p - e^{-q})} \quad (59)$$

Es wird somit

$$i\pi \mathop{E}_{-\infty}^{\infty}\mathop{}_{0}^{\infty} ((u)) = \frac{\pi}{4}\, e^{p/2} \frac{(e^p - 1)\,(e^q + 1) - (e^p + 1)\,(e^q - 1)}{(e^p - e^q)\,(e^p - e^{-q})\,(e^q - 1)}$$

und, wenn man noch x ersetzt durch $\frac{x}{s}$ und p durch $2ps$

$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{e^q + e^{-q} - 2\cos 2px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps+q}}{(e^{2ps+q} - 1)\,(e^q - 1)} \quad (60)$$

Die Reihenentwicklung liefert hier nichts neues, es ergiebt sich die Legendre'sche Formel (38). Man hätte also, nachdem einmal (38) gefunden war, das Integral (60) nach der Reihe (36) entwickeln und mit Hilfe der genannten Formel auf den analytischen Ausdruck

(60) bringen können; doch habe ich die directe Berechnung wiedergegeben wegen der Analogie mit dem nächstfolgenden Integral, welches sich auf dem angedeuteten Wege nicht berechnen lässt.

7.

$$u(z) = \frac{\sin\frac{pz}{2}}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{z}{1+z^2}$$

$$A = 0$$

Pole: $$z' = i, \quad az_\varkappa = \varkappa + ib$$

$$c' = -\frac{i}{4} e^{p/2} \frac{e^p - 1}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

$$c_\varkappa = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^\varkappa}{e^{\pi b} + e^{-\pi b}} \cdot \frac{-b + i\varkappa}{a^2 + (\varkappa + ib)^2}$$

$$\Sigma c_\varkappa = \frac{1/4}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \left\{ \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_1^\infty \varkappa (-1)^\varkappa F(\varkappa, b, a) \right\}$$

und nach (59), wenn man wieder x durch $\frac{x}{s}$ und p durch $p \,.\, s$ ersetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{1/2\,ps+q}}{(e^q+1)(e^{ps+q}-1)} \tag{61}$$

Die bei den anderen Integralen angewandte Reihenentwicklung liefert die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{\sin(4\varkappa+2)px}{\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{s^2+x^2} = \pi \,.\, \frac{1 + e^{-(4\varkappa+2)ps}}{e^{ps} + e^{-ps}} \tag{62}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 4\varkappa px}{\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{s^2+x^2} = -\pi \,.\, \frac{1 - e^{-4\varkappa ps}}{e^{ps} + e^{-ps}} \tag{63}$$

Der Fall $s = 0$ ist zwar durch diese letzte Entwicklung nicht streng bewiesen, doch bleiben die Gleichungen (61) — (63) für diesen Grenzwert bestehen, wie aus der besonderen Behandlung desselben unter 5. ersichtlich ist. Die Gleichungen (45) — (47) stellen sich in der Tat dar als Specialfälle der Gleichungen (61) — (63).

Endlich können nicht nur aus (62) und (63), sondern auch aus den Gleichungen (37) — (40), (43) und (44) nach dem auf (46) und (47)

angewandten Verfahren die entsprechenden Integrale abgeleitet werden, welche anstatt sin und cos der Vielfachen von px die Potenzen von sin und cos enthalten.

8. Setzt man allgemein

$$u(z) = \frac{\left.\begin{matrix}\sin^n\\ \cos^n\end{matrix}\right\}(tz)}{e^q + e^{-q} - 2\cos pz} \cdot \frac{\varphi^l(z)}{f^m(z)} \tag{64}$$

wobei $\varphi^l(z)$ eine algebraische Function vom $l$ten Grade $f^m(z)$ eine solche vom $m$ten Grade bedeutet, so kann, wenn alle Nullwerte von $f^m(z)$ bekannt sind, das Integral

$$\int_0^\infty u(x)\,dx$$

immer in eine convergente Reihe entwickelt werden, vorausgesetzt, dass für reelle Werte von x

$$u(-x) = u(x)$$

$$n \,.\, s \overset{<}{=} 1 \quad \text{und} \quad l < m - 1$$

oder

$$n \,.\, s < 1 \quad \text{und} \quad l = m - 1$$

und dass, solange ϑ innerhalb der Grenzen 0 und π bleibt,

$$A = \lim_{k=\infty} k \,.\, e^{i\vartheta} \,.\, u(k \,.\, e^{i\vartheta})$$

einen bestimmten, endlichen oder verschwindenden, von ϑ unabhängigen Wert besitze.

Aus demselben berechnet man weiter die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varkappa px \,.\, \left.\begin{Bmatrix}\sin^n\\ \cos^n\end{Bmatrix}\right.(tx)}{\sin px} \cdot \frac{\varphi^l(x)}{f^m(x)}\,dx \tag{64a}$$

mit Hilfe der Reihenentwicklung (36).

III. Summirung einer Gruppe von trigonometrischen Reihen.

Im folgenden Abschnitte bedeute

$$\left.\begin{aligned}
T &= \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{N}\,dx, \quad U = \int_0^\infty \frac{e^x \sin\alpha x}{N}\,dx \\
V &= \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{N}\,dx, \quad W = \int_0^\infty \frac{e^x \cos\alpha x}{N}\,dx \\
N &= e^{2x} - 2e^x \cos y + 1 = (e^x - e^{iy})\,(e^x - e^{-iy})
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Alle vier Integrale lassen sich in trigonometrische Reihen entwickeln, wie folgt

$$U - e^{-iy}T = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{e^x - e^{iy}}\,dx = \sum_1^\infty e^{i(\varkappa-1)y} \int_0^\infty e^{-\varkappa x}\sin\alpha x\,dx$$

$$W - e^{-iy}\,V = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{e^x - e^{iy}}\,dx = \sum_1^\infty e^{i(\varkappa-1)y} \int_0^\infty e^{-\varkappa x}\cos\alpha x\,dx$$

Die unter der Summe stehenden Integrale sind nach der Formel

$$\int_0^\infty e^{-px} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} (qx)\,dx = \frac{\begin{Bmatrix}q\\ p\end{Bmatrix}}{p^2 + q^2}$$

zu berechnen. Die erste der beiden Gleichungen ergiebt nach Trennung des reellen Teiles vom imaginären

$$U - T\cos y = \alpha \sum_1^\infty \frac{\cos(\varkappa-1)y}{\varkappa^2 + \alpha^2}$$

$$T\sin y = \alpha \sum_1^\infty \frac{\sin(\varkappa-1)y}{\varkappa^2 + \alpha^2}$$

oder

$$U\cos y - T = \alpha \sum_1^\infty \frac{\cos\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2}$$

$$U\sin y = \alpha \sum_1^\infty \frac{\sin\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2}$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$C = \sum_1^\infty \frac{\cos\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2}, \quad S = \sum_1^\infty \frac{\sin\varkappa x}{\varkappa^2+\alpha^2} \tag{66}$$

so wird

$$U\cos y - T = \alpha C, \quad U\sin y = \alpha S$$

und, wie sich durch analoge Rechnung ergiebt,

$$W\cos y - V = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad W\sin y = -\frac{\partial C}{\partial y} \tag{67}$$

Setzt man jetzt

$$u(z) = \frac{\sin \alpha z}{e^z - 1} \tag{68}$$

und führe das Integral $\int u\,dz$ um das unendlich lange Rechteck $0ABC$ (Fig. 3), worin

$$0A = CB = \infty$$
$$0C = AB = y$$
$$2n\pi < y < 2n + 2)\pi$$

so wird

$$\int_0^A u\,dz = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1}\,dx = \alpha \sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa^2 + \alpha^2} \tag{68a}$$

$$\int_A^B u\,dz = i \lim_{k=\infty} \int_0^y \frac{\sin \alpha(k + iy)}{e^{k+iy} - 1}\,dy = 0 \tag{68b}$$

$$\int_B^C u\,.\,dz = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \{\sin\alpha x(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) + i\cos x(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\}$$

$$.\,(e^x\cos y - 1 - ie^x\sin y)\,.\,\frac{dx}{N}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\{(e_{\alpha y} + e^{-\alpha y})(U\cos y - T) + (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})W\sin y\}$$

$$+ \frac{i\{}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})U\sin y - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})(W\cos y - V))$$

und nach (66) und (67)

$$\int_B^C u\,dz = -\tfrac{1}{2}\left\{(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})\,.\,\alpha C - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\frac{\partial C}{\partial y}\right\}$$
$$+ \frac{i}{2}\left\{(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})\,.\,\alpha S - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\frac{\partial S}{\partial y}\right\} \tag{68c}$$

Das Integral $\int_C^0 u(z)\,dz$ zerfällt in zwei Gruppen von Teilintegralen: solche auf Halbkreisen mit dem Radius δ um die Pole

$$z_h = i2h\pi \qquad h = 1, 2, 3, \ldots n$$

im negativen Sinn der Drehung — ihre Summe sei $\frac{\pi}{2} \cdot D_{2n}$ — und solche zwischen den Polen auf der Y Achse — ihre Summe sei $R + iS$ — , so dass

$$\int_C^0 u\,dz = R + iS + \frac{\pi}{2} \cdot D_{2n} \tag{68d}$$

Die Radien δ sollen gegen null convergirende Grössen sein.

Nun ist

$$D_{2n} = -i\delta \sum_1^n h \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(z_h + \delta e^{i\vartheta}) e^{i\vartheta} d\vartheta$$

wird aber δ verschwindend klein, so geht D_{2h} über in

$$D_{2n} = \sum_1^n (e^{2h\pi a} - e^{-2h\pi a}) = \frac{e^{(2n+1)\pi a} + e^{-(2x+1)\pi a} - e^{\pi a} - e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \tag{69}$$

Sollte y eine der Grenzen erreichen, so wäre der Integrationsweg noch um einen Viertelskreis zu vermindern resp. zu vergrössern. Es soll aber später bewiesen werden, dass die auf diese Weise bestimmten Grenzwerte

$$\begin{aligned} D'_{2n} &= \tfrac{1}{2}(D_{2n-s} + D_{2n}) & y &= 2n\pi \\ D_{2n+2} &= \tfrac{1}{2}(D_{2n} + D_{2n+2}) & y &= (2n+2)\pi \end{aligned} \tag{69a}$$

vollständig zwecklos sind.

Weiter findet man

$$\left.\begin{aligned} R &= -\tfrac{1}{4}\int_0^y (e^{ay} - e^{-ay})\,dy = -\frac{e^{ay} + e^{-ay} - 2}{2a} \\ S &= -\tfrac{1}{4}\left\{\int_0^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi+\delta}^{4\pi-\delta} + \ldots \int_{2n\pi+\delta}^{y} (e^{ay} - e^{-ay}) \operatorname{ctg}\frac{y}{2} \cdot dy\right\} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Die Pole der Function (68) sind alle durch den Integrationsweg ausgeschlossen, daher ist

$$\int u\, dz = 0$$

woraus die Trennung des reellen Teiles vom imaginären mit Hilfe der Gleichungen (68) — (70) ergiebt:

$$\tfrac{1}{2}(e^{ay} + e^{-ay})\, C - \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2a} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{e^{ay} + e^{-ay} - 2}{4a^2} \tag{71}$$

$$= \frac{\pi}{2a} D_{2n} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2}$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{ay} + e^{-ay}) S - \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2a} \cdot \frac{\partial S}{\partial y} \tag{72}$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim_{\delta=0} \left\{ \int_0^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi+\delta}^{4\pi-\delta} + \ldots \int_{2n\pi+\delta}^{y} \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2a} \operatorname{ctg}\frac{y}{2} \cdot dy \right\}$$

NB. Gleichung (72) gilt nur für verschwindend kleine Werte von δ [wäre δ endlich, so wäre die Summe D_{2n} nicht reell, sondern enthielte, wie man sich überzeugen kann, imaginäre Glieder, die in (72) auftreten müssten!] Nichtsdestoweniger bleibt das Integral in (72) endlich und bestimmt, da die Pole auf Kreisen umgangen wurden und daher die δ an den Teilstellen gleich sind.

Unter C und S hat man sich nicht die Reihen (66), sondern den analytischen Ausdruck für deren Summe vorzustellen. Dann kann man C und S nach Belieben differentiiren, während die Reihen selbst schon durch die zweite Differentiation divergent werden.

Man differentiire Gleichung (71) nach y; dann nimmt dieselbe folgende einfache Gestalt an

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - a^2 C - \tfrac{1}{2} = 0$$

woraus

$$\frac{1}{a} + 2aC = \pi \frac{A_{2n} e^{ay} + B_{2n} e^{-ay}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} \tag{73}$$

Die Constanten A und B wurden von vornherein mit einem Index versehen, da sie von D_{2n} abhängig und also Functionen von n sein müssen. Aus (73) ist

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A_{2n} e^{ay} - B_{2n} e^{-ay}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}$$

Setzt man diese Werte von C und $\frac{\partial C}{\partial y}$ ein in (72), so kommt

$$\frac{A_{2n}+B_{2n}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}=D_{2n}+\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\varkappa^2+\alpha^2}\right\}$$

und mit Hilfe von (24)

$$A_{2n}+B_{2n}=e^{(n+1)\alpha\pi}+e^{-(2n+2)\alpha\pi}$$

Setzt man ferner in (73) $y=(2n+1)\pi$

so kommt

$$\frac{A_{2n}e^{(2n+1)\alpha\pi}+B_{2n}e^{-(2n+1)\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa^2+\alpha^2}\right\}$$

und nach (25)

$$A_{2n}e^{(2n+1)\alpha\pi}+B_{2n}e^{-(2n+1)\alpha\pi}=2$$

sodass endlich

$$A_{2n}=e^{-(2n+1)\alpha\pi},\quad B_{2n}=e^{(2n+1)\alpha\pi}$$

wonach (73) übergeht in [1])

$$\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{1}^{\infty}\varkappa\frac{\cos\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2}=\pi\cdot\frac{e^{\alpha[(2n+1)\pi-y]}+e^{-\alpha[(2n+1)\pi-y]}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} \tag{74}$$

Die Differentiation nach y ergiebt

$$\sum_{1}^{\infty}\varkappa\frac{\varkappa\sin\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\alpha[(2n+1)\pi-y]}-e^{-\alpha[(2n+1)\pi-y]}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} \tag{75}$$

$$2n\pi<y<(2n+2)\pi$$

Für diese Gleichungen sind die Grenzwerte D_{2n}' und D_{2n}'' ohne Bedeutung; ihnen zufolge wäre

$$A'_{2n}=\tfrac{1}{2}(A_{2n-2}+A_{2n}),\quad B_{2n}'=\tfrac{1}{2}(B_{2n-2}+B_{2n})$$
$$A''_{2n}=\tfrac{1}{2}(A_{2n}+A_{2n+2}),\quad B_{2n}''=\tfrac{1}{2}(B_{2n}+B_{2n+2})$$

Nun erkennt man aber leicht, dass (74) an den Grenzen gilt, wenn man allgemein

$$A'_{2n}=\frac{pA_{2n-2}+qA_{2n}}{p+q}\text{ etc.}$$

setzt, wobei p und q beliebige Zahlen sind. Allerdings gilt dann die Gleichung nicht mehr streng, d. h. sie gilt unter Umständen nicht mehr an den Grenzen, nachdem man sie differentiirt hat. Es wäre demnach zu erwarten, dass (75) an den Grenzen nur dann bestehen bliebe, wenn

1) Vgl. Schlömilch, „Neue Methode zur Summirung etc." Grunert's Archiv XII, pag 131.

$$p = q = 1$$

Doch ist eine weitere Untersuchung darüber gegenstandslos, da die Summe (75) für die Werte

$$y = m\pi$$

so wie so ihre Bedeutung verliert, wie im Folgenden kurz bewiesen werden soll.

$$S(m\pi) = \lim_{\substack{\delta=0\\k=\infty}} \sum_1^k \frac{\varkappa \sin \varkappa(m\pi \pm \delta)}{\varkappa^2 + \alpha^2}$$

Es besteht zwischen den unendlich kleinen Grössen δ und $\frac{1}{k}$ keine Relation, so dass

$$\beta = \delta \, . \, k$$

eine willkürliche positive Grösse ist

$$S(m\pi) = \pm(-1)^m \lim_{k=\infty} \sum_1^k \frac{\varkappa \sin \frac{\varkappa}{k}\beta}{\varkappa^2 + \alpha^2} = \pm(-1)^m \int_0^\beta \frac{\sin x}{x} dx$$

$S(m\pi)$ hat also einen unbestimmten Wert, welcher entweder zwischen $-S'$ [1]) und 0 oder zwischen 0 und S' liegt, jenachdem m gerade oder ungerade ist und y gegen die Grenze wächst oder abnimmt. Für

$$p = q = 1$$

erhält man bloss den Specialwert, welchen $S(m\pi)$ annimmt, wenn man willkürlich festsetzt, dass, während y gegen die Grenze $m\pi$ wächst, $\beta = \infty$, d. h., dass k von einer höheren Ordnung unendlich werden soll, als $\frac{1}{\delta}$, was aber absolut keinen Sinn hat. —

Für die folgende Ableitung nehme man

$$0 < y < 2\pi$$

(worin weiter keine Beschränkung liegt) und integrire Gleichung (74), nachdem man dieselbe durch die Substitution

$$\alpha = 0, \qquad n = 0$$

auf die Form

$$\sum^{\infty} \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^2} = \frac{y^2}{4} - \frac{\pi}{2} y + \frac{\pi^2}{6} \tag{74a}$$

---

1) Wobei S' das Maximum der Function $\mathfrak{S}(x)$ bedeutet [vergl. Abschnitt I] nämlich $S(\pi) = 1{,}851\ 936$.

gebracht hat, wiederholt nach y zwischen den Grenzen 0 und y und führe nach der Gleichung

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa^{2n}} = \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} \cdot B_{2n}$$

die Bernoulli'schen Zahlen ein. Setzt man endlich noch

$$y = 2\pi x$$

so erhält man allgemein [1])

$$\frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^\infty \frac{\cos 2\varkappa\pi x}{\varkappa^{2n}} = B_{2n} - \binom{2n}{2} B_{2n-2}\, x^2$$

$$+ \binom{2n}{4} B_{2n-4}\, x^4 - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{2n}{2} B_2 x^{2n-2}$$

$$+ (-1)^n x^{2n-1} \{n - x\} \tag{76}$$

$$\frac{2 \cdot (2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \cdot \sum_1^\infty \frac{\sin 2\varkappa\pi x}{\varkappa^{2n+1}} = \binom{2n+1}{1} B_{2n}\, x - \binom{2n+1}{3} B_{2n-2}\, x^3$$

$$+ \binom{2n+1}{5} B_{2n-4}\, x^5 - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{2n+1}{2} B_2 x^{2n-1}$$

$$+ (-1)^n x^{2n} \left\{\frac{2n+1}{2} - x\right\} \tag{77}$$

$$0 < x < 1$$

Setzt man in (76) $x = \frac{1}{2}$, so geht die linke Seite über in die Summe

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^\infty \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa^{2n}}$$

welche, wie man leicht beweist, den Wert

$$- B_{2n} \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n-1}}$$

hat, man erhält somit aus (76) die folgende Recursionsformel für die Bernoulli'schen Zahlen

$$2(2^{2n} - 1) B_{2n} = \binom{2n}{2} 2^{2n-2} B_{2n-2} - \binom{2n}{4} 2^{2n-4} B_{2n-4} + \binom{2n}{6} 2^{2n-6} B_{2n-6}$$

$$- \ldots + (-1)^n \binom{2n}{2} 2^2 B_2 + (-1)^{n+1}\{2n - 1\} \tag{78}$$

Es lassen sich ferner für die Reihen

---

1) cf. Raabe, Crelle's J. XLII, pag. 348.

$$C_n = \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^n}, \quad S_n = \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^a} \tag{79}$$

eine Serie von Recursionsformeln aufstellen durch Integration der Function

$$u(z) = \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} \tag{80}$$

über den Umfang des Rechteckes $0ABC$ (Fig. 3.)

Da, wie schon bemerkt, in der Bedingung

$$0 < y < 2\pi$$

keine wesentliche Beschränkung liegt, so soll dieselbe im Folgenden gelten; es ist übrigens nach den für die Function (68) angestellten Betrachtungen nicht schwer, zu dem allgemeinen Fall $2n\pi < y < (2n+2)\pi$ überzugehen.

Die Teilintegrale stellen sich dar als

$$\int_0^A u\,dz = \sum_1^\infty \int^\infty e^{-\varkappa n}\, x^{2n-1} = (2n-1)! \sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa^{2n}} = \frac{1}{2}\,\frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2n}$$

$$\int_A^B u\,dz = 0$$

$$\int_B^C u\,dz = -\int_0^\infty \frac{(x+iy)^{2n-1}(e^{x-iy}-1)}{e^{2x} - 2e^x \cos y + 1}\,dx$$

$$\int_C^0 u\,dz = -\frac{i}{2}\int_0^y \frac{(iy)^{2n-1}(e^{-iy}-1)}{1-\cos y}\,dy$$

und, weil der Integrationsweg keinen Pol umschliesst,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2n} = \int_0^\infty (x+iy)^{2n-1}(e^x \cos y - 1 - 2e^x \sin y)\,\frac{dx}{N}$$

$$+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{y^{2n}}{2n} + i\int_0^y y^{2n-1}\,\mathrm{ctg}\,\frac{y}{2}\,dy\right\}$$

wobei

$$N = e^{2x} - 2e^x \cos y + 1$$

Zur Ausführung des Integrals $\int\limits_0^\infty$ setze man

$$F_m = \int\limits_0^\infty \frac{x^m\,dx}{N}, \quad G_m = \int\limits_0^\infty \frac{e^x x^m\,dx}{N}$$

Dann erhält man analog der am Anfang dieses Abschnittes für die Integrale T und U ausgeführten Rechnung

$$G_m \cos y - F = \frac{m!}{\pi^{m+1}} \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{m+1}}$$

$$G_m \sin y = \frac{m!}{\pi^{m+1}} \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{m+1}}$$

wonach schliesslich

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{} \cdot \frac{B_{2n} + (-1)^n y^{2n}}{(2n)!} &= \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n}} - \frac{y^2}{2!} \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n-2}} + \dots \\ &+ y \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n-1}} - \frac{y^3}{3!} \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n-3}} + \dots \\ &- \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \left\{ \frac{y^{2h}}{(2h)!} C_{2n-2h} + \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} S_{2n-2h-1} \right\} \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \int\limits_1^y t^{2n-1} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot dt &= \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n}} - \frac{y^2}{2!} \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n-2}} \\ &+ \dots - y \sum_1^\infty \varkappa \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n-1}} + \frac{y^3}{3!} \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n-3}} - \dots \\ &- \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \left\{ \frac{y^{2h}}{(2h)!} S_{2n-2h} - \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} C_{2n-2h-1} \right\} \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Will man zu dem allgemeinen Fall $2m\pi < y < (2m+2)\pi$ übergehen, so ist der Integrationsweg, wie im letzten Beispiel, um die entsprechenden Halbkreise (Fig. 3) zu vergrössern. Es ist dann in (81) rechts das Glied

$$E_{2m} = (-1)^n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} \sum_{h=1}^m h^{2n-1}$$

$$2m\pi < y < (2m+2)\pi$$

hinzuzufügen. Eine Bestimmung von Grenzwerten für E_{2m} wäre auch hier völlig zwecklos, da (81) immer das Glied $\sum\limits_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa}$ enthält, welches an den Grenzen unbestimmt wird. In (82) hat diese Erweiterung nicht viel Sinn, da, wie in (72) ein unbequemer Grenzwert auftritt.

Die Recursionsformeln (81) und (82) können zugleich als Differentialgleichungen der Functionen C_n und S_n angegeben werden, deren Lösungen in der Hälfte der Fälle, nämlich für C_{2n} und S_{2n+1} durch die Gleichungen (76) und (77) gegeben sind.

Transcendente höherer Ordnung sind die Functionen S_{2n} und C_{2n+1}. Einzig C_1 wird durch eine verhältnissmässig einfache Function dargestellt. Es ergiebt sich aus (82) für $n = 1$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^x t \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot dt = \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa^2} - x\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} = \int C_1\, dx - xC_1 + \text{const}$$

Man differentiirt nach x:

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad C = \gamma - \lg\left(\sin\frac{x}{2}\right)$$

für $x = \pi$ wird

$$\gamma = -\{1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\ .\ .\ .\} = \lg\tfrac{1}{2}$$

$$C_1 = \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} = -\lg\left(2\sin\frac{x}{2}\right) \quad 0 < x < 2\pi$$

Die Beschränkung $0 < x < 2\pi$ fällt weg, wenn man schreibt

$$\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} = -\tfrac{1}{2}\lg\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right) \tag{83}$$

Hieraus kommt durch Integration von 0 bis x

$$\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa^2} = -\frac{x}{2}\lg\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^x t\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot dt \tag{84}$$

Es ist also bereits S_2 nicht mehr durch einfache analytische Functionen auszudrücken. Die numerische Berechnung geschieht

wohl am besten mit Hilfe der Kinkelin'schen Function $G(x)$ [1]), welche für ganzzahlige Argumente der Function

$$G(n+1) = 1^1 \,.\, 2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 4^4 \,.\,.\,.\, n^n$$

entspricht. Es wird

$$\pi \int_0^x t \operatorname{ctg} \pi t \,.\, dt = x \lg (2 \sin \pi x) - \lg \frac{G(1-x)}{Gx} \tag{84a}$$

Diese Formel empfiehlt sich zur Berechnung von S_2, da für den Logarithmus der Function G rasch convergente Reihen existiren, welche denjenigen für $\lg \Gamma$ sehr ähnlich sind. Die Berechnung kann mit sehr grosser Genauigkeit ausgeführt werden, da die Constanten dieser Reihen

$$S_h = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\varkappa^h}$$

bis zu S_{70} auf 30 Decimalen berechnet worden sind [2]).

In Gleichung (87) giebt die Substitution $y = \pi$

$$(2^{2n}-1) B_{2n} - \binom{2n}{2} (2^{2n-3}-1) B_{2n-2} + \binom{2n}{4} (2^{2n-5}-1) B_{2n-4} - \,.\,.$$
$$+ (-1)^{n+1} \binom{n}{2} B_2 + \frac{(-1)^n}{2} = 0 \tag{81a}$$

Dividirt man jetzt Gleichung (78) durch 2 und subtrahirt sie von (81a), so kommt, wenn man noch $n+1$ an Stelle von n setzt,

$$\binom{2n+2}{2} B_{2n} - \binom{2n+2}{4} B_{2n-2} + \,.\,.\,.\, - + (-1)^n \,.\, n = 0 \tag{85}$$

Diese Formel ist der einfachste Specialfall einer allgemeineren, von Arndt [3]) gefundenen Formel

$$\frac{\varkappa-1}{2} = \binom{\varkappa+1}{2} B_2 - \binom{\varkappa+1}{4} B_4 + \,.\,.\,.\, + (-1)^{\frac{\varkappa-\mu-1}{2}} \,.\, \binom{\varkappa+1}{\varkappa-\mu+1} B_{\varkappa-\mu+1}$$

für

$$\varkappa = 2n+1, \quad \mu = 2$$

---

1) Kinkelin, Ueber eine neue mit der Γ Function verwandte Transcendente etc. Crelles J. LVII, pag 122.

2) Stieljes, Tables des valeurs des sommes S_h. Acta math. IX, 299.

3) Crelles J. XXXI, pag. 249.

Es ist dies die einfachste aller bis jetzt gefundenen Recursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen, soviel deren von Schlömilch [1]), Göpel [2]), Dienger [3]), Malmsten [4]), Worpitzky [5]) und Anderen aufgestellt worden sind.

Ganz anderer Natur, als die Lösung der Differentialgleichung (71), an welche sich die vorstehenden Betrachtungen anknüpften, ist diejenige von (72), deren vollständiges Integral

$$4\alpha S = -e^{\alpha y}\int_p^y e^{-\alpha t}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt + e^{-\alpha y}\int_q^y e^{\alpha t}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt \tag{86}$$

ist, wobei p und q die zwei willkürlichen Constanten sind. Dieselben lassen sich auf zwei verschiedene Arten bestimmen. Man erhält entweder

$$4\alpha\sum_1^{\infty}\frac{\sin\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2} = \int_y^{\pi}\{e^{\alpha(y-t)} - e^{-\alpha(y-t)}\}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt$$

$$+\,2\{e^{\alpha(\pi-y)} - e^{-\alpha(\pi-y)}\}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa+1}\,.\,\varkappa}{\varkappa^2+\alpha^2} \tag{86a}$$

oder man schreibt den folgenden Grenzwort

$$4\alpha\sum_1^{\infty}\frac{\sin\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2} = \lim_{\delta=0}\left\{-\int_\delta^p\left[e^{\alpha(y-t)} - e^{-\alpha(y-t)}\right]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt\right.$$

$$\left.+\,\frac{e^{\alpha y}-e^{-\alpha y}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}\,.\int_\delta^{\pi}\left[e^{\alpha(\pi-t)} - 2^{-\alpha(\pi-t)}\right]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt\right\} \tag{86b}$$

Für beide Formeln ergiebt sich die Ableitung aus (86) mit Leichtigkeit. Jedoch muss ich an dieser Stelle von einer Behandlung der Function

$$S = \sum_1^{\infty}\,.\,\frac{\sin\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2}$$

in extenso absehen, da sie zu weit vom eigentlichen Thema dieses Aufsatzes ablenken würde.

---

1) Grunert's Archiv III., pag. 9.

2) ibid. III, pag. 64.

3) Crelle's J. XXXIV, pag. 75.

4) ibid. XXXV, pag. 50.

5) ibid. XCIV, pag. 203.

II.

Elementare Berechnung der Trägheitsmomente von Linien, Flächen und Körpern.

Von

Dr. **E. Rehfeld**

in Elberfeld.

Als Huyghens sich mit der Aufgabe beschäftigte die Schwingungszeit eines physischen Pendels zu berechnen, wurde er auf den Begriff des Trägheitsmomentes, auf den Ausdruck Σmr^2 geführt. Ihm verdankt man auch den wichtigen Satz, dass das Trägheitsmoment irgend eines geometrischen Systems (Strecke, Fläche, Körper) für eine Drehachse gleich ist dem Trägheitsmoment des Systems für die parallele Schwerpunktsachse, vermehrt um das Product der Gesamtmasse des Systems in das Quadrat der Abstände der beiden Achsen. Erst Euler führt für den Ausdruck Σmr^2 den Namen Moment der Trägheit — ein. Da das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf irgend eine Achse als die Summe unendlich vieler Producte aus den einzelnen Massenteilchen und das Quadrat der Abstände dieser Massenpunkte von der Momentenachse angegeben wird, so kann dasselbe im allgemeinen nur unter Anwendung der Infinitesimalrechnung gefunden werden. Das in vielen elementaren Lehrbüchern der Physik angewandte Verfahren zur Berechnung der Trägheitsmomente etwa von Strecken, rechteckigen und quadratischen Platten, Dreiecks- und Kreisflächen, rechtwinkligen Parallelepipeda, geraden Cylindern und Kegeln, und welches darin besteht, dass man das vorliegende System in n Teile teilt, die bei der einen Entwickelung gleich, bei der andern ungleich sind, und für jeden Teil das Trägheitsmoment durch zwei Grenzen einschliesst,

führt streng genommen doch zur Integration, denn man benutzt schliesslich ein Additionsverfahren, bei welchem der Quotient $\frac{\Sigma_1^n n^k}{n^{k+1}}$ bei constantem ganzen positiven k und unendlich wachsendem n gegen die Grenze $\frac{1}{k+1}$ convergirt.

Dass aber eine ganz elementare Behandlung der Trägheitsmomente vieler homogener Systeme möglich ist, soll diese kleine Arbeit zeigen: sie soll den Beweis erbringen, dass in vielen Fällen die geometrische Verwandtschaft von Systemen zur Bestimmung benutzt werden kann. Das Wesen dieser neuen Bestimmungsart besteht darin, dass man die gegebenen Systeme in unter sich und dem ganzen ähnliche Elemente zerlegt, und mit Hülfe der bestehenden Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten der Teile und des ganzen Systems, das letztere berechnet. Besonders ist bei diesem Verfahren noch hervorzuheben, dass die gefundenen Resultate in der allgemeinsten Form auftreten, d. h für alle Momentenachsen gültig sind. Dieses wird dadurch erreicht, dass bei der Bestimmung der Trägheitsmomente keine Grössen verwandt werden, die dem System direct entnommen sind, es werden Projectionen von Strecken auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene benutzt; und diese Projectionen nehmen eben für jede neue Achse neue Werte an. Behandelt werden die Trägheitsmomente der Strecke, des Dreiecks, Parallelogramms, der Ellipse, des dreiseitigen schiefen Prismas, schiefen Parallelepipedons, elliptischen Cylinders, der dreiseitigen Pyramide, des elliptischen Kegels und des Ellipsoids.

Die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten von ähnlichen homogenen geometrischen Systemen bezogen auf ähnlich liegende Achsen.

Werden ähnliche geometrische Systeme (Linien, Flächen, Körper) von gleicher Dichtigkeit in gleich viel ähnliche Elemente geteilt, und sind die Massen von entsprechenden Elementen m und μ, die Abstände dieser Elemente von ähnlich liegenden Achsen r und ϱ, so stehen die Trägheitsmomente dieser Elemente mr^2 und $\mu\varrho^2$, sowie die Trägheitsmomente der ganzen homogenen Systeme Σmr^2 und $\Sigma\mu\varrho^2$ für ähnlich liegende Achsen in einem constanten Verhältniss.

Ist λ das Verhältniss von zwei entsprechenden Strecken in dem ähnlichen homogenen Systeme, so ist

$$m : \mu = 1 : \lambda^m$$

und zwar ist $m = 1$ für Systeme von einer Dimension (Linien), $m = 2$ für Systeme von zwei Dimensionen (Flächen), $m = 3$ für Systeme mit drei Dimensionen (Körper). Und da ferner

$$r : \varrho = 1 : \lambda$$
$$r^2 : \varrho^2 = 1 : \lambda^2$$

so verhalten sich

$$mr^2 : \mu\varrho^2 = 1 : \lambda^n$$
$$\Sigma mr^2 : \Sigma \mu\varrho^2 = 1 : \lambda^n$$

Für Linien ist $n = 3$, für Flächen $n = 4$, für Körper $n = 5$.

Bezeichnet man die Trägheitsmomente ähnlicher homogener Systeme bezogen auf ähnlich liegende Achsen mit T und τ, so gilt allgemein

$$\tau = \lambda^n T$$

Das Trägheitsmoment einer homogenen materiellen Strecke.

Enthalte die homogene Strecke AB (Fig. 1) bei gleichmässiger Verteilung die Masse m, und werde das Trägheitsmoment derselben bezogen auf eine durch den Schwerpunkt S gehende Momentenachse h_s mit T_s, bezogen auf eine durch den Eckpunkt A zu h_s parallele Momentenachse h_a mit T_a bezeichnet, so besteht nach dem Huyghens-schen Satze die Beziehung

$$T_a = T_s + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

wenn l den Abstand des zweiten Endpunkts B der Strecke von der Achse h_a oder die Projection der Strecke AB auf eine h_s oder h_a senkrechte Ebene angiebt. Das Trägheitsmoment T_s ist aber gleich der Summe der Trägheitsmomente der beiden Hälften SA und SB. Da aber entsprechende Punkte dieser Teile von h_s gleiche Abstände haben, so sind die Trägheitsmomente von SA und SB bezogen auf h_s gleich und halb so gross als T_s selbst. Das Trägheitsmoment von AS bezogen auf h_a hat denselben Wert wie das Trägheitsmoment von SB bezogen auf h_s, nämlich $\frac{1}{2} T_s$. Nun sind aber AB und AS ähnlich liegende Systeme für das Aehnlichkeitsverhältniss $\lambda = 2$ bezogen auf dieselbe Achse h_a, es ist deshalb

$$T_a = 2^3 \,.\, \tfrac{1}{2} T_s = 4 T_s$$

Aus den beiden Gleichungen von T_a leitet man schliesslich ab

$$T_s^2 = \frac{1}{12} ml^2$$

Belastet man die Projection um AB auf eine zu h_s senkrechte Ebene, nämlich $A_0 B_0$ gleichmässig mit der Masse m von AB, so kann auch

$$T_s = \frac{1}{12} ml^2$$

gedeutet werden als das Trägheitsmoment der Projection $A_0 B_0$ bezogen auf die im Schwerpunkt S_0 senkrecht stehende Momentachse. Es kann mithin das Trägheitsmoment einer Strecke für eine schiefe Schwerpunktsachse ersetzt werden durch das Trägheitsmoment der Projection der Strecke auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene, wenn nur die Projection die Masse der gegebenen Strecke gleichmässig auf die Länge verteilt in sich birgt.

Geht die Achse durch den Endpunkt A der Strecke, so ist der Wert des zugehörigen Trägheitsmomentes

$$T_a = 4T_s = \tfrac{1}{3} ml^2$$

Für die durch den beliebigen Punkt P parallel zu h_s verlaufende Achse h_p, welche von h_5 den Abstand u hat, wird das gesuchte Trägheitsmoment

$$T_p = T_5 + mu^2$$

und liegt der Punkt P auf der Strecke AB selbst, und heissen die Projectionen der Teile auf die zu h_p senkrechte Ebene l_1 und $_2(l_2 > l_1)$, so ist

$$l = l_1 + l_2, \quad u = \frac{l_2 - l_1}{2}$$

und es wird

$$T_p = \tfrac{1}{3} m(l_1{}^2 - l_1 l_2 + l_2{}^2)$$

Das Trägheitsmoment einer homogenen materiellen Dreiecksfläche.

Enthalte das homogene materielle Dreieck ABC bei gleichmässiger Verteilung der Masse über die ganze Fläche die Masse m. Seien DEF die Halbirungspunkte der Seiten des Dreiecks (Fig. 2). Das Trägheitsmoment des Dreiecks bezogen auf eine durch den Schwerpunkt S gehende Momentenachse h_s, nämlich T_s, ist für dieselbe Achse gleich der Summe der Trägheitsmomente der vier Unterdreiecke, welche unter sich congruent und dem ganzen Dreieck nach dem Verhältniss $\lambda = \frac{1}{2}$ ähnlich sind. Die um das mittlere Unter-

dreieck herumliegenden Dreiecke haben für die durch die Ecken A, B, C parallel zu h_s verlaufenden Achsen $h_a\, h_b\, h_c$ dieselben Trägheitsmomente wie für h_s.

Wird nämlich das Trägheitsmoment des Dreiecks AEF mit dem Schwerpunkt G für die zu h_s parallele Schwerpunksachse h_g mit t_g bezeichnet, während das Trägheitsmoment dieses Dreiecks für h_s durch t_{gs} angegeben wird, so ist das Trägheitsmoment des Unterdreiecks, wenn der Abstand der Achsen h_s und h_g noch u heisst

$$t_{gs} = t_g + \frac{m}{4} u^2$$

Andererseits ist für die Achse h_a das Moment desselben Dreiecks, wenn v den Abstand der Achsen h_a und h_g ergiebt

$$t_{ga} = t_g + \frac{m}{4} v^2$$

Nun ist aber $AG = GS$, woraus folgt $u = v$; es ist mithin

$$t_{gs} = t_{ga}$$

Ebenso besteht

$$t_{hs} = t_{hb}$$

$$t_{ks} = t_{kc}$$

Heisst das Trägheitsmoment des Dreiecks DEF für die Achse $h_s : t_s$, so ist das Trägheitsmoment des ganzen Dreiecks für h_s

$$T_s = t_{ga} + t_{hb} + t_{kc} + t_s$$

Werden die Trägheitsmomente des ganzen Dreiecks für die Achsen h_a, h_b, h_c mit T_a, T_b, T_c bezeichnet, so liefert die Aehnlichkeit der Teildreiecke mit dem ganzen die Beziehungen

$$T_a = 2^4 t_{ga}$$
$$T_b = 2^4 t_{hb}$$
$$T_c = 2^4 t_{kc}$$
$$T_s = 2^4 t_s$$

Nach dem Huygens'schen Satze ist aber, wenn die Abstände der Achse h_5 von h_a, h_b und h_c einzeln mit p, q, r bezeichnet werden.

$$T_a = T_s + mp^2$$
$$T_b = T_s + mq^2$$
$$T_c = T_s + mr_2$$

Aus den letzten Gleichungen folgt aber

$$T_s = \frac{1}{16}(T_a + T_b + T_c + T_s) = \frac{1}{12} m(p^2 + q^2 + r^2)$$

Fällt h_5 in die Ebene des gegebenen Dreiecks, so bezeichnen p, q und r die Abstände der Ecken des Dreiecks von der Achse h_5. Steht die Achse geneigt zur Ebene des Dreiecks und heisst seine Projection auf eine zu h_s senkrechte Ebene $A_0B_0C_0$, so sind p, q, r d. h. die Abstände der Ecken ABC von h_s, gleich den Verbindungslinien des Schwerpunktes S_0 des projicirten Dreiecks mit den Ecken dieses Dreiecks selbst. Heissen die Schwerpunktstransversalen des projicirten Dreiecks $t_a t_b t_c$, so besteht zwischen diesen und den Seiten a, b, c der Projection die bekannte Beziehung

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

und weil

$$p = \tfrac{2}{3} t_a, \quad q = \tfrac{2}{3} t_b, \quad r = \tfrac{2}{3} t_c$$

also

$$p^2 + q^2 + r^2 = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ist, so findet man auch für T_s die Ausdrücke

$$T_5 = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{27} m(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$$

Steht die Achse h_s zur Ebene des Dreiecks ABC senkrecht, so nehmen p, q, r sowie a, b, c ihre grössten Werte AS, BS, CS an. Das Trägheitsmoment eines Dreiecks wird daher ein Maximum für eine zur Ebene des Dreiecks senkrechte Achse.

Da h_s zur Ebene der Projection senkrecht steht, so kann

$$\frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2)$$

auch als das Trägheitsmoment dieser Projection aufgefasst werden.

Das Trägheitsmoment eines homogenen materiellen Dreiecks für eine beliebige zur Ebene des Dreiecks schief stehende Schwerpunktsachse ist demnach für dieselbe Achse gleich dem Trägheitsmoment der Projection des Dreiecks auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene, wenn die Masse des gegebenen Dreiecks gleichmässig über die Projection verteilt gedacht wird.

Mit Hülfe der gefundenen Werte für das Trägheitsmoment eines Dreiecks bezogen auf eine Schwerpunktsachse kann das Trägheitsmoment für jede andere Achse nach dem Satze von Huyghens leicht abgeleitet werden.

Für die zu h_5 parallel laufende Achse h_a durch den Eckpunkt

A wird das zugehörige Trägheitsmoment T_a, gleichviel ob h_a in der Ebene des Dreiecks liegt, oder dazu geneigt ist, angegeben durch

$$T_a = T_s + mp^2$$

oder da

$$p^2 = \frac{4}{9} t_a^2 = \frac{4}{36}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

durch

$$T_a = \frac{1}{12} m(3b^2 + 3c^2 - a^2) = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2 + 4t_a^2)$$

Geht die Achse durch die Mitte D der Seite BC, so ist für die Achse h_d das Trägheitsmoment

$$T_d = T_s + m\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

Wird die Seite BC Momentenachse, so wird $b = c = h$, und das gesuchte Trägheitsmoment hat den Wert $\frac{1}{6} mh^2$.

Fällt die Momentenachse mit der Transversalen AD zusammen, so wird

$$b = c = \frac{a}{2}$$

und man erhält für das zugehörige Trägheitsmoment den Ausdruck

$$\frac{1}{6} mb^2 = \frac{1}{24} ma^2$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen materiellen Parallelogramms.

Enthalte das homogene materielle Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 3) bei gleichmässiger Verteilung der Masse über die ganze Fläche die Masse m. Man zerlege das Parallelogramm durch Parallele zu den Seiten in den mittleren Abständen der Gegenseiten in vier congruente Parallelogramme, die dem ganzen nach dem Verhältniss $\lambda = \frac{1}{2}$ ähnlich sind. Die über Kreuz liegenden Unterparallelogramme AS und CS, sowie BS und DS haben in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt S des gegebenen Parallelogramms gehende Achse h_s dasselbe Trägheitsmoment, weil entsprechende Punkte von der Momentenachse gleichen Abstand haben. Wird bezogen auf h_s das Trägheitsmoment des ganzen Parallelogramms, sowie der Unterparallelogramme AS und BS einzeln mit T_s, t_{sa}, t_{sb} bezeichnet, so ist

$$T_s = 2(t_{sa} + t_{sb})$$

Heissen nun die Trägheitsmomente des ganzen Parallelogramms für die zu h_s durch die Eckpunkte C und D parallel laufenden Achsen h_c und h_d beziehungsweise T_c und T_d, so ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Parallelogramme AS und AC, sowie BS und BD für die ähnlich liegenden Achsen h_s und h_e, sowie h_s und h_s, die Beziehungen

$$T_c = 2^4 t_{sa}, \quad T_d = 2^4 t_{sb}$$

Andererseits besteht aber nach dem Satze von Huyghens, wenn e und f die Abstände der Achse h_s von h_c und h_d bezeichnen,

$$T_c = T_s + me^2, \quad T_d = T_s + mf^2$$

Aus den letzten Gleichungen leitet man ab

$$T_s = \frac{1}{8}(T_c + T_d) = \frac{1}{6} m(e^2 + f^2)$$

Liegt h_s in der Ebene des Parallelogramms, so geben e und f die Abstände der Eckpunte C und D von h_s an. Für eine zur Ebene des Parallelogramms geneigte Achse h_s können e und f nicht grösser werden als die halben Diagonalen des gegebenen Parallelogramms, deren Projectionen auf eine zu h_s senkrechte Ebene eben e und f sind. Es ist deshalb T_s für eine zur Ebene des Parallelogramms senkrechte Ebene ein Maximum.

Werden die Projectionen der Seiten des Parallelogramms auf eine zu h_s senkrechte Ebene mit a, b, c, d bezeichnet, so ist, gleich viel ob h_s in der Ebene des Parallelogramms liegt oder zu derselben geneigt ist,

$$4(e^2 + f^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{24} m(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

Hieraus folgt:

Das Trägheitsmoment eines Parallelogramms für eine beliebige zur Ebene der Fläche geneigte Schwerpunktsachse ist für dieselbe Achse gleich dem Trägheitsmoment der Projection des Parallelogramms auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene, wenn die Masse des gegebenen Parallelogramms gleichmässig über die Projection verteilt gedacht wird.

Die Berechnung des Trägheitsmomentes eines Parallelogramms für eine schiefe Achse ist mithin auf das Trägheitsmoment der Projection der Fläche für eine senkrechte Achse zurückführbar.

Das obige numerische Ergebniss hätte auch sofort aus dem

Werte des Trägheitsmomentes eines Dreiecks für die Schwerpunktsachse einer Seite gefunden werden können.

$$T_s = \frac{\frac{1}{4}m}{12}(a^2+b^2) + \frac{\frac{1}{2}m}{12}(c^2+d^2) = \frac{1}{24}m(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Auch hätte man aus dem Werte für das Trägheitsmoment des Parallelogramms, welcher verhältnissmässig leichter gefunden wird als der Wert des Trägheitsmomentes des Dreiecks, auf letzteren schliessen können. Doch sind, wie auch später noch einige Male, an dieser Stelle die Ableitungen getrennt durchgeführt, um die Fruchtbarkeit des Principes, welches die Trägheitsmomente von homogenen ähnlichen Systemen in Bezug auf ähnlich liegende Achsen in einfache Beziehung setzt, ausführlicher darzutun.

Mit Hülfe des gefundenen Wertes für das Trägheitsmoment eines Parallelogramms bezogen auf eine Schwerpunktsachse, kann das Moment für jede andere Achse nun leicht berechnet werden.

Für die Eckenachse h_c ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$T_c = \frac{1}{6}m\, 7e^2 + f^2) = \frac{1}{12}m(a^2+b^2+12c^2)$$

Geht diese Achse durch den Schwerpunkt parallel der Seite BC, ist also $b = d = 0$, so ist

$$T_s = \frac{1}{12}ma^2$$

Fällt die Achse mit BC zusammen, so ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$\frac{1}{12}ma^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3}ma^2$$

Für die Diagonale AC als Achse ist $a = b = c = d$, und es wird

$$T_s = \tfrac{1}{6}ma^2$$

Das Trägheitsmoment einer homogenen materiellen Ellipsenfläche.

Die Ellipse enthalte bei gleichmässiger Verteilung der Masse über die ganze Fläche die Masse m.

Man teile die Fläche (Fig. 4) durch Radienvectoren in eine grade Anzahl gleicher Ellipsenausschnitte, einer Forderung, der dadurch genügt wird, dass man den Hauptkreis der Ellipse in die ge-

forderte Anzahl gleicher Teile teilt und die Schnittpunkte der Ordinaten dieser Teilpunkte und der Ellipse mit dem Mittelpunkte der Ellipse verbindet. Für eine durch den Schwerpunkt der Fläche S gehende Momentenachse h_s ist dann das Trägheitsmoment der Ellipsenfläche gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Ausschnitte.

Nun ist aber nach dem Früheren S. 42 das Trägheitsmoment eines Dreiecks für eine beliebige Eckenachse h_a (Fig. 2)

$$T_a = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2 + 4t_a^2)$$

wenn b, c, t_a die Projectionen der Seiten und der Transversale, die von der Ecke A ausgehen, bezeichnen.

Wird die Anzahl der Ellipsenausschnitte aber gross, so kann man jedem Ellipsenausschnitt als ein schmales Dreieck auffassen, dessen Masse $\frac{m}{n}$ ist und für den Fall, dass $n = \infty$ wird, erhält man als Wert für das Trägheitsmoment des ersten Ellipsenausschnittes SAB für die Momentenachse h_s

$$t_{s1} = \frac{1}{12}\frac{m}{n}(r_1^2 + r_1^2 + 4r_1^2) = \tfrac{1}{2}\frac{m}{n}r_1^2$$

weil b, c, t_a für die Grenze $n = \infty$ den Wert r_1 des Radiusvector der Projection des Halbmessers des ersten Ellipsenausschnittes auf eine zu h_s senkrechte Ebene annimmt.

Für die folgenden Ellipsenausschnitte findet man entspechend

$$t_{s2} = \tfrac{1}{2}\frac{m}{n}r_2^2$$

$$\vdots$$

$$t_{sn} = \tfrac{1}{2}\frac{m}{n}r_n^2$$

woraus durch Addition hervorgeht

$$T_s = \tfrac{1}{2}\frac{m}{n}(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)$$

Nun lässt sich aber für die Projection der Ellipse, welche im allgemeinen selbst wieder eine Ellipse ist, die Summe der Quadrate der Radienvectoren zu Paaren so ordnen, dass man $\frac{1}{2}n$ Summen

von Quadraten conjugirter Halbmesser der projicirten Ellipse erhält. Heissen ein Paar conjugirte Halbmesser der Projection ϱ und τ, so ist

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \tfrac{1}{2}n(\varrho^2 + \tau^2)$$

und es hat T_s den Wert

$$T_s = \tfrac{1}{4}m(\varrho^2 + \tau^2)$$

Es ist demnach das Trägheitsmoment einer Ellipse für eine beliebige Schwerpunktsachse gleich dem Product aus der Masse der Ellipse in den vierten Teil der Quadratesumme der Abstände der Endpunkte conjugirter Halbmesser von dieser Achse, oder gleich dem Product aus der Masse der Ellipse in den vierten Teil der Quadratensumme der Projectionen von zwei conjugirten Halbmessern der Ellipse auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Der gefundene Wert

$$T_s = \tfrac{1}{4}m(\varrho^2 + \tau^2)$$

kann auch für die projicirte Ellipse (Grundellipse) gedeutet werden, und man findet dann, dass das Trägheitsmoment einer Ellipse für eine schiefe Schwerpunktsachse immer auf das Trägheitsmoment der Grundellipse mit senkrechter Schwerpunktsachse zurückgeführt werden kann, nur muss dabei der Grundellipse die Masse der gegebenen Ellipse zuerteilt werden.

Aus dem gewonnenen Resultat ergeben sich leicht die Werte der Trägheitsmomente für bestimmte Fälle.

Steht die Achse im Schwerpunkt der Ellipse mit den Halbachsen a und b senkrecht, so ist das Trägheitsmoment

$$T_s = \tfrac{1}{4}m(a^2 + b^2)$$

Für den Kreis hat man für diesen speciellen Fall

$$T_s = \tfrac{1}{2}mr^2$$

Fällt die Achse mit einem Durchmesser λ der Ellipse zusammen, so gilt auch

$$T_s = \tfrac{1}{4}m(\varrho^2 + \tau^2)$$

es geben aber in diesem Falle ϱ und τ die senkrechten Abstände der Endpunkte von zwei conjugirten Halbmessern der Ellipse von der Achse λ an. Nun ist aber, wie am Schlusse dieser Betrachtung bewiesen werden soll, in jeder Ellipse die Quadratensumme der Projectionslote aus den Endpunkten von zwei conjugirten Halbmessern

auf irgend einem Durchmesser λ eine constante Grösse, gleich dem Quadrate des Projectionslotes aus dem Endpunkte des zu λ conjugirten Durchmessers r auf den Durchmesser λ selbst. Hat dieses Projectionslot die Länge d, so ist

$$T_s = \tfrac{1}{4} md^2$$

Für die Hauptachsen a und b als Rotationsachsen erhält man die zugehörigen Trägheitsmomente

$$T_a = \tfrac{1}{4} mb^2$$
$$T_b = \tfrac{1}{4} ma^2$$

und für den Kreis hat man das specielle Resultat

$$T_s = \tfrac{1}{4} mr^2$$

Lehrsatz. In jeder Ellipse ist die Quadratsumme der Projectionslote aus den Endpunkten conjugirter Halbmesser auf irgend eine Mittelpunktsachse eine constante Grösse, nämlich gleich dem Quadrate des Projectionslotes aus dem Endpunkte des Halbmessers, der der Projectionsachse conjugirt ist.

Haben die Endpunkte E und F (Fig. 4) von zwei conjugirten Halbachsen $0E = \alpha$, und $0F = \beta$ auf das schiefwinklige Coordinatensystem der conjugirten Halbaxen $0C = \gamma$, $0D = \delta$ bezogen, die Coordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$. Es bestehen dann die Gleichungen

$$x_1^2 + y_1^2 = \alpha^2$$
$$x_2^2 + y_2^2 = \beta^2$$
$$\frac{x_1^2}{\gamma^2} + \frac{y_1^2}{\delta^2} = 1$$
$$\frac{x_2^2}{\gamma^2} + \frac{y_2^2}{\delta^2} = 1$$

woraus bei Beachtung der Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2$$

folgt

$$x_1^2 + x_2^2 = \gamma^2$$

Wird der spitze Coordinatenwinkel COD mit ϱ bezeichnet, so ist

$$x_1^2 \sin^2\varrho + x_2^2 \sin^2\varrho = \gamma^2 \sin^2\varrho$$
$$EE_1^2 + FF_1^2 = CC_1^2$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen dreiseitigen schiefen Prismas mit parallelen Grundflächen.

Man zerlege das dreiseitige Prisma, welches bei gleicher Dichtigkeit die Masse m haben möge, durch drei durch die Mitten der Grundkanten geführte Schnitte und durch einen Schnitt parallel der Grundfläche in der mittleren Höhe in acht unter sich congruente Teilprismen, welche dem ganzen Prisma im Verhältniss $\lambda = \frac{1}{2}$ ähnlich sind (Fig 5).

Das Trägheitsmoment des Prismas für irgend eine Schwerpunktsachse h_s wird gleich sein dem Trägheitsmoment der 8 Teilprismen für dieselbe Achse.

Bezogen auf die Momentenachse h_s sei das Trägheitsmoment des ganzen Prismas T_s, das Trägheitsmoment des der Kante AH anliegenden Prismas für dieselbe Achse h_s werde mit t_{sa} bezeichnet, die Bezeichnungen für die anderen Teilprismen seien entsprechend t_{sb}, t_{sc}, t_{sd}, t_{se}, t_{sf}. Die beiden mittleren Teilprismen liegen für h_s so, dass sich immer je zwei entsprechende Punkte bestimmen lassen, welche von h_s gleichen Abstand haben, diese Prismen haben deshalb gleiches Trägheitsmoment, welches mit t_s bezeichnet werden soll Es besteht demnach

$$T_{sa} = t_{sa} + t_{sb} + t_{sc} + t_{sd} + t_{se} + t_{sf} + 2t_s$$

Die um die mittleren Prismen herumliegenden sechs Teilprismen haben für die durch die Ecken $ABCDEF$ parallel zu h_s verlaufenden Achsen h_a . . . h_f dasselbe Moment wie für h_s; heissen die Trägheitsmomente für die neuen Achsen t_a . . . t_f, so ist beispielsweise $t_{sa} = t_a$, d. h. das Trägheitsmoment des Teilprismas an der Kante AH hat für die Achsen h_s und h_a denselben Wert.

Liegt der Schwerpunkt des Teilprismas an der Kante AH in S_1 und heisst die durch S_1 parallel zu h_s und h_a verlaufende Achse h_1 und das Trägheitsmoment des Teilprismas für diese Schwerpunktsachse t_1, so bestehen, wenn die Abstände der Achsen h_s und h_1, sowie h_1 und h_a durch u und v angegeben werden, die Gleichungen

$$t_{sa} = t_1 + \frac{m}{8} u^2$$

$$t_a = t_1 + \frac{m}{8} v^2$$

Nun liegt aber S_1 auf der Verbindungslinie von A nach S und halbirt dieselbe, denn ist G der Schwerpunkt der unteren Grund-

fläche des Teilprismas, so ist einmal, wie beim Dreieck gezeigt wurde,

$$GS = GH$$

zum andern liegt S_1 auf der durch G zu HA parallelen Achse in halber Höhe, d. h. es ist:

$$GS_1 = \frac{1}{2} HA$$

woraus hervorgeht, dass die Punkte $AS_1 S$ in gerader Linie liegen und

$$AS_1 = S_1 S$$

ist. Sind aber diese Strecken gleich, so sind es auch ihre Projectionen u und v auf eine zu h_1 senkrechte Ebene. Hieraus geht aber hervor

$$t_{sa} = t_a$$

Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass

$$t_{sb} = t_b$$

es ist deshalb auch

$$T_s = t_a + t_b + t_c + t_d + t_e + t_f + 2t_s$$

Führt man für die Trägheitsmomente des ganzen Prismas bezogen auf die Eckenachsen $h_a \ldots h_f$ die Bezeichnungen $T_a \ldots T_f$ ein, so liegen für jede Eckenachse je ein Teilprisma und das ganze Prisma ähnlich, und es liefert die Aehnlichkeit der Prismen für ähnlich liegende Achsen die Beziehungen

$$T_a = 2^5 t_a \qquad T_d = 2^5 t_d$$
$$T_b = 2^5 t_b \qquad T_e = 2^5 t_e$$
$$T_c = 2^5 t_c \qquad T_f = 2^5 t_f$$

In Bezug auf h_s liegt das ganze Prisma zu den beiden mittleren Teilprismen nicht ähnlich. Zieht man aber durch die Schwerpunkte der Grundflächen des ganzen Prismas O und N zu h_s parallele Achsen, welche von h_s den Abstand $\frac{1}{2}d$ haben mögen, so liegen für diese neuen Achsen und für h_s die Teilprismen und das ganze Prisma ähnlich, es besteht deshalb die Beziehung

$$T_s + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2^5 t_s$$

Unter Benutzung der sieben letzten Gleichungen findet man

$$\frac{15}{16} T_s = \frac{1}{32}(T_a + T_b + T_c + T_d + T_e + T_f) + \frac{1}{64} m8^2$$

Andererseits bestehen aber nach dem Huyghens'schen Satze,

wenn die Abstände der Achsen $h_a h_b \ldots h_f$ von h_s mit $r_a \ldots r_f$ genannt werden, die Gleichungen

$$T_a = T_s + mr_a^2 \qquad T_d = T_s + mr_d^2$$
$$T_b = T_s + mr_b \qquad T_e = T_s + mr_e^2$$
$$T_c = T_s + mr_c^2 \qquad T_f = T_s + mr_f^2$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{24} m(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r_d^2 + r_e^2 + r_f^2) + \frac{1}{48} md^2$$

In dieser Form können die Grössen $r_a \ldots r_f$ noch durch die Projectionen der Kanten des gegebenen Prismas auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene ersetzt werden.

Heissen die Abstände des Schwerpunktes S von den sechs Ecken $R_a \ldots R_f$ die Grundkanten A, B, C, die Seitenkante D, so folgt aus dem Dreieck ASD

$$AS^2 + DS^2 = AH^2 + DH^2 + 2SH^2$$

oder

$$R_a^2 + R_d^2 = \tfrac{1}{2}D^2 + 2SH^2$$

ebenso bestehen

$$R_b^2 + R_e^2 = \tfrac{1}{2}D^2 + 2SK^2$$
$$R_c^2 + R_f^2 = \tfrac{1}{2}D^2 + 2SL^2$$

Durch Addition findet man hieraus

$$R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 + R_d^2 + R_e^2 + R_f^2 = \tfrac{3}{2}D^2 + 2(SH + SK + SL)^2$$
$$= \tfrac{3}{2}D^2 + \tfrac{2}{3}(A^2 + B^2 + C^2)$$

Diese Beziehung geht bei der Projection auf eine zu h_s senkrechte Ebene über in

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r_d^2 + r_e^2 + r_f^2 = \tfrac{3}{2}d^2 + \tfrac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2 + 3d^2)$$

Das Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prismas für eine beliebige Schwerpunktsachse ist demnach gleich dem Product aus der Masse des Prismas und dem 36ten Teil der Quadratensumme der Projectionen der drei Grund- und drei Seitenkanten auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Stellt man T_s dar durch

$$T_s = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{12} m d^2$$

und beachtet, dass $\frac{1}{36}m(a^2+b^2+c^2)$ das Trägheitsmoment eines Schnittes *HKL* (Mitteldreieck) parallel zu den Grundflächen durch den Schwerpunkt des Prismas, $\frac{1}{12}md^2$ das Trägheitsmoment der Achse *ON* des gegebenen Prismas bezeichnet, so ergiebt sich der Satz:

Das Trägheitsmoment eines dreiseitigen schiefen homogenen Prismas ist für eine beliebige Schwerpunktsachse gleich dem Trägheitsmoment des Mitteldreiecks und der Achse, wenn sowol das Mitteldreieck als auch die Achse mit der Masse des Prismas belastet werden.

Heissen die Schwerpunktstransversalen des Mitteldreiecks t_a, t_b, t_c, so kann man, wie beim Dreieck T_s auf die Form bringen

$$T_s = \frac{1}{27}m(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) + \frac{1}{12}md^2$$

Es sollen noch einige specielle Werte für das Trägheitsmoment angegeben werden.

Ist h_s der Seitenkante parallel, fällt also h_s mit der Achse zusammen, so ist $d = 0$, und es wird das Trägheitsmoment des Prismas gleich dem Trägheitsmoment der Grundfläche, wenn dieselbe die Masse des Prismas enthält

$$T_s = \frac{1}{36}m(a^2 + b^2 + c^2)$$

Ist *AH* Momentenachse, so ist das Trägheitsmoment

$$T_a = \frac{1}{12}m(3b^2 + 3c^2 - a^2) = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2 + t_a^2)$$

Das Trägheitsmoment für die Schwerpunktstransversale *HT* des Mitteldreiecks ist, weil $b = c = \frac{a}{2}$

$$\frac{1}{24}ma^2 + \frac{1}{12}md^2 = \frac{1}{24}m(a^2 + 2d^2)$$

Läuft h_s parallel *KL* durch *S*, so ist $a = 0$, $b = c$ und das Moment wird angegeben durch

$$\frac{1}{36}m(2b^2 + 3d^2)$$

Für die Momentenachse *KL* wird das Trägheitsmoment

$$\frac{1}{36}m(2b^2+3a^2)+m\left(\frac{t_a}{3}\right)^2 = \frac{1}{12}m(2b^2+d^2)$$

Geht die Momentenachse durch die Ecke L des Mitteldreiecks HKL, so ist, da der Abstand der parallelen Achsen h_s und h_l gleich $\frac{2}{3}t_c$ ist,

$$T_l = T_s + \tfrac{4}{9}t_c^2$$

welcher Ausdruck wegen der Relation

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

auch in die Form gebracht werden kann

$$T_l = \frac{1}{36}m(3a^2+3b^2+12t_c^2+3d^2)$$

Das Trägheitsmoment eines homogen schiefwinkligen Parallelepipedons.

Man zerlege das Parallelepipedon, welches bei gleicher Dichtigkeit die Masse m enthalten möge, durch drei durch die Mitten von je vier parallelen Kanten geführte Schnitte in acht congruente Teile, welche dem gegebenen Körper nach dem Verhältniss $h = \frac{1}{2}$ ähnlich sind (Fig. 6).

Inbezug auf eine durch den Schwerpunkt S des ganzen Parallelepipedons gehende Momentenachse h_s haben je zwei über Kreuz liegende Teilparallelepipeda, so SA und SG etc. dasselbe Moment, weil die Elemente dieser Körper einander so zugeordnet werden können, dass dieselben von der Achse h_s gleichen Abstand besitzen. Die Trägheitsmomente der Teilparallelepipeda für die Achse h_s mögen heissen $t_{sa} \ldots t_{sh}$, dann wird das Trägheitsmoment des ganzen Parallepipedons für die Achse h_s angegeben durch

$$T_s = 2(t_{sa} + t_{sb} + t_{sc} + t_{sd})$$

Heissen nun die Trägheitsmomente des ganzen Parallelepipedons für die zu h_s durch die Eckpunkte $EFGH$ parallel laufenden Achsen $h_e \ldots h_h$ beziehungsweise $T_e \ldots T_h$, so ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Parallelepipeda SC und EC, für die zu den Körpern ähnlich liegenden Achsen h_s und h_e; SD und FD für h_s und h_f; SA und GA für h_s und h_g; SB und HB für h_s und h_h die Beziehungen

$$T_e = 2^5 t_{sc} \qquad T_g = 2^5 t_{sa}$$
$$T_f = 2^5 t_{sd} \qquad T_h = 2^5 t_{sb}$$

Werden die Abstände der Ecken $EFGH$ von h_s, oder die Projectionen der halben Diagonalen des Parallelepipedons auf eine zu h_s senkrechte Ebene mit $r_e r_f r_g r_h$ bezeichnet, so bestehen auch nach dem Satze von Huyghens die Gleichungen

$$T_e = T_s + mr_e^2 \qquad T_g = T_s + mr_g^2$$
$$T_f = T_s + mr_f^2 \qquad T_h = T_s + mr_h^2$$

woraus man ableitet

$$T_s = \frac{1}{12} m(r_e^2 + r_f^2 + r_g^2 + r_h^2)$$

Zwischen den halben Diagonalen des Parallelepipedons R_e, R_f, R_g, R_h und den Kanten desselben A, B, C besteht aber, wie durch einfache Rechnung gefunden wird, die Beziehung

$$R_e^2 + R_f^2 + R_g^2 + R_h^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

welche für die Projection auf eine zu h_s senkrechte Ebene übergeht in

$$r_e^2 + r_f^2 + r_g^2 + r_h^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

so dass

$$T_s = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2 + c^2)$$

wird, wenn abc die Projectionen von drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten auf eine zu h_s senkrechte Ebene bedeuten.

Das Trägheitsmoment eines schiefen Parallelepipedons ist demnach gleich dem Producte aus der Masse in den zwölften Teil der Quadratensumme aus den Projectionen der vier halben Diagonalen oder der drei Kanten, die eine Ecke bilden.

Bringt man T_s in die Form

$$T_s = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) + \frac{1}{12} mc^2$$

und beachtet, dass $\frac{1}{12} m(a^2+b^2)$ des Trägheitsmoment eines Schnittes $KLMN$ (Mittelparallelogramm) parallel den Grundflächen durch den Schwerpunkt, $\frac{1}{12} mc^2$ das Trägheitsmoment der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundflächen OP d. h. der Achse bezeichnen, so kommt man zu dem Satze:

Das Trägheitsmoment eines schiefen Parallelepipedons für eine beliebige Schwerpunktsachse ist gleich dem Trägheitsmoment des

Mittelparallelogramms und der Achse, wenn Mittelparallelogramm und Achse einzeln mit der Masse des Parallelepipedons belastet werden.

Ist h_s der Kante AE parallel, so ist $r_e = r_g$ und $r_f = r_h$ und ferner $c = 0$, man erhält die bei dem Parallelogramm gefundenen Werte

$$T_h = \frac{1}{6} m(r_e^2 + r_f^2) = \frac{1}{6} m(p^2 + q^3)$$

$$= \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

Fällt h_s mit AE zusammen, so ist

$$T_a = T_s + mr_e^2 = \frac{1}{6} m(7r_e^2 + r_f^2)$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen elliptischen Cylinders mit parallelen Grundflächen.

Man zerlege den Cylinder, dessen Masse bei gleicher Dichtigkeit m sein möge, durch Achsenschnitte in eine gerade Anzahl (n) gleicher Ausschnitte von der Masse $\frac{m}{n}$. Legt man durch den Schwerpunkt S des Cylinders, der im Mittelpunkt der Achse AD liegt, eine Momentenachse h_s, so ist bezogen auf diese Achse, das Trägheitsmoment des Cylinders gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzeln Cylinderausschnitte (Fig. 7.)

Nach dem Früheren ist aber das Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prismas für eine Achse durch die Mitte einer Kante (Fig. 5)

$$T_l = \frac{1}{36} m(3n^2 + 3b^2 + 12t_e + 3d^2)$$

wenn a, $b'_{,}$, t_e die Projectionen der Seiten und der Transversale des Mitteldreiecks von der Ecke L aus und d die Projection der Seitenkante des Prismas auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene bezeichnet.

Wird die Anzahl der Cylinderausschnitte sehr gross, so kann man jeden Ausschnitt als ein schmales dreiseitiges Prisma von der Masse $\frac{m}{n}$ betrachten, und für den Fall $n = \infty$ wird das Trägheitsmoment des ersten Ausschnittes für die Achse

$$s_1 = \frac{1}{36} \frac{m}{n} (3r_1^2 + 3s_1^2 + 12v_1^2 + 3d^2)$$
$$= \frac{1}{2} \frac{m}{n} r_1^2 + \frac{1}{12} \frac{m}{n} d^2$$

weil für $n = \infty$, $a = b = t_2 = r_1$ gleich dem Radiusvector der Projection des Halbmessers des ersten Ellipsenausschnittes wird, der in der Mittelellipse des Cylinders liegt.

Für die folgenden Cylinderausschnitte erhält man die entsprechenden Werte für die Trägheitsmomente

$$t_{s_2} = \frac{1}{2} \frac{m}{n} r_2^2 + \frac{1}{12} \frac{m}{n} d^2$$

.
.
.

$$t_{sn} = \frac{1}{2} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_2^3 + \ldots r_n^3) + \frac{1}{12} md^2$$

Durch Addition findet man das Trägheitsmoment des Cylinders für eine beliebige Schwerpunktsachse

$$T_s = \frac{1}{2} \frac{m}{n} r_n^2 + \frac{1}{12} md^2$$

Die Summe der Quadrate der n Radienvectoren der Projection der Mittelellipse, lassen sich aber zu Paaren so anordnen, dass man $\frac{1}{2}n$ Summen von Quadraten conjugirter Halbmesser der projicirten Ellipse bekommt Heissen demnach ein Paar conjugirte Halbmesser der Projection ϱ und τ, so ist

$$T^s = \frac{1}{4} m (\varrho^2 + \tau^2) + \frac{1}{12} md^2$$

Für die Achse h_s kann $\frac{1}{4}m(\varrho^2 + \tau^2)$ gedeutet werden als das Trägheitsmoment des elliptischen Schnittes (Mittelellipse), der parallel einer Grundfläche durch den Schwerpunkt des Cylinders gelegt ist, ebenso kann $\frac{1}{12} md^2$ als das Trägheitsmoment der Cylinder-Achse AD angesehen werden. Man kann demnach für die Schwerpunktsache den Satz aufstellen:

Das Trägheitsmoment eines elliptischen Cylinders ist gleich dem Trägheitsmoment der Mittel-Ellipse und der Achse, wenn die Mittel-Ellipse sowol wie die Achse mit der Masse des Cylinders belastet werden.

Wird die Achse des Cylinders zur Momentenachse, so ist $d = 0$ und

$$T_5 = \frac{1}{4}m(\varrho^2 + T^2)$$

Fällt die Achse mit einem Durchmesser der Mittel-Ellipse zusammen, so ist nach dem bei der Ellipse angestellten Betrachtungen

$$T_s = \frac{1}{4}m(l^2 + n^2) + \frac{1}{12}md^2 = \frac{1}{4}m\varrho^2 + \frac{1}{12}md^2$$

wenn l und n die Abstände der Endpunkte conjugirter Durchmesser von der Momentenachse bezeichnen, und o den Abstand des Endpunktes des zur Momentenachse conjugirten Durchmesser von der Drehachse angiebt.

Für die mit den Hauptachsen $2p$ und $2q$ der Mittel-Ellipse zusammenfallenden Momentenachsen sind die Trägheitsmomente

$$T_p = \frac{1}{4}mq^2 + \frac{1}{12}md^2$$

$$T_q = \frac{1}{4}mp^2 + \frac{1}{12}md^2$$

Wird der Cylinder zu einem Rotationscylinder, so ist das Trägheitsmoment für eine im Schwerpunkt auf der Achse senkrechte Momentenachse

$$T_r = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}md^2$$

Für die geometrische Achse des Rotationscylinders erhält man das Trägheitsmoment

$$T = \frac{1}{2}mr^2$$

Das Trägheitsmoment einer homogenen dreiseitigen Pyramide.

Es sollen zunächst einige allgemeine Betrachtungen über die Lage des Schwerpunktes, und überdies Beziehungen, die zwischen den Kantenlängen und den Verbindungsstrecken des Schwerpunktes mit den Ecken und den Kantenmitten bestehen, abgeleitet werden. (Fig. 8).

Drei durch die Mittender Kanten geführte Ebenen EFG, FJK, $FGHJ$, zerlegen die Pyramide in zwei congruente Pyramiden (gleiche Grundfläche und Höhe), welche der gebenen Pyramide nach dem Verhältniss $\lambda = \frac{1}{2}$ ähnlich sind und in zwei dreiseitige inhaltsgleiche Prismen

($\frac{1}{4}$ Grundfläche $\times$ $\frac{1}{2}$ zugehörig. Höhe $=$ $\frac{1}{8}$ geb. Pyramide). Es teilt demnach das Parallelogramm $FGHS$ (FG und JH parallel und gleich $\frac{1}{2}$ BC) die gegebene Pyramide in zwei inhaltsgleiche Hälften, es enthält deshalb das Parallelogramm den Schwerpunkt der Pyramide. Für die Parallelogramme $EFHK$ und $EGKJ$ gilt dasselbe, es liegt mithin der Schwerpunkt der Pyramide im Schnitte der drei Parallelogramme, d. h. im Schnitte S der Diagonalen des Parallelogramms $FGHJ$. Beachtet man, dass $EFGHJK$ Halbirungspunkte der Kanten sind, so findet man, dass der Schwerpunkt auf den Verbindungslinien der Mitten gegenüber liegender Kanten liegt, und dass diese Verbindungslinien im Schwerpunkt halbirt werden. Zerlegt man andererseits die gegebene Pyramide durch Schnitte parallel der Fläche ABC in viele dünne Platten, so liegt der Schwerpunkt jeder Platte und mithin auch der Schwerpunkt S der Pyramide auf der Verbindungslinie der Spitze D mit dem Schwerpunkt O der Grundfläche. Ist L der Schnitt der Transversale DO mit der Ebene EFG, so ist $DL = LO$, es ist aber auch $LS = SO$ weil $FS = SH$ ist, woraus hervorgeht $SO' = \frac{1}{4} DO$. Es teilt mithin der Schwerpunkt einer Pyramide die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Schwerpunkt der Gegenfläche nach dem Verhältniss 1 :3.

Ist N der Schwerpunkt der Teilpyramide $DEFG$, so halbirt N die Strecke DS, denn

$$DN = \frac{3}{4} DL = \frac{3}{8} DO$$

$$NS = NL + LS = \frac{1}{4} DO + SO = \frac{1}{8} DI + \frac{1}{4} DO = \frac{3}{8} DO$$

Aus den Dreiecken DAK, DBH und DCJ leitet man ab:

$$\begin{aligned} 2DO^2 &= DA^2 + DK^2 = AO^2 - OK^2 = DA^2 + DK^2 - 3OK^2 \\ &= DB^2 + DH^2 - BO^2 - OH^2 = DB^2 + DH^2 - 3OH^2 \\ &= DC^2 + DJ^2 - CO^2 - OJ^2 = DC^2 + DJ^2 - 6OJ^2 \end{aligned}$$

Für die Begrenzungsflächen bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} 4DK^2 &= 2DB^2 + 2DC^2 - BC^2 \\ 4DH^2 &= 2DC^2 + 2DA^2 - AC^2 \\ 4DJ^2 &= 2DA^2 + 2DB^2 - AB^2 \end{aligned}$$

woraus folgt

$$4(DK^2 + DH^2 + DJ^2) = 4(DA^2 + DB^2 + DC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

$$4(AK^2 + BH^2 + CJ^2) = 3(AB^2 + BC^2 + CB^2)$$

$$OK^2 + OH^2 + OJ^3 = \frac{1}{12}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Bei Bemerkung dieser Formeln findet man

$$DO^2 = \tfrac{1}{3}(DA^2 + DB^2 + DC^2) - \tfrac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

und weil $DS = \tfrac{3}{4} DO$

$$DS^2 = \frac{3}{16}(DA^2 + DB^2 + DC^2) - \frac{1}{16}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

In ähnlicher Weise leitet man ab

$$CS^2 = \frac{3}{16}(CA^2 + CB^2 + CD^2) - \frac{1}{16}(AD^2 + DB^2 + BA^2)$$

$$BS^2 = \frac{3}{16}(BA^2 + BC^2 + BD^2) - \frac{1}{16}(AD^2 + DC^2 + CA^2)$$

$$AS^2 = \frac{3}{16}(AB^2 + AC^2 + AD^2) - \frac{1}{16}(BC^2 + CD^2 + DB^2)$$

hieraus geht hervor:

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 = \tfrac{1}{4}(DA^2 + DB^2 + DC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Es ist also die vierfache Quadratensumme der Verbindungslinien des Schwerpunktes mit den Ecken gleich der Quadratsumme über den Kanten.

Es bestehen ferner die Gleichungen

$$2SE^2 = SA^2 + SD^2 - DE^2 - AE^2 = SA^2 + SD^2 - \tfrac{1}{2}DA^2$$

$$\begin{aligned}
2SF^2 &= SD^2 + SB^2 - \tfrac{1}{2}DB^2 \\
2SG^2 &= SD^2 + SC^2 - \tfrac{1}{2}DC^2 \\
2SJ^2 &= SB^2 + SA^2 - \tfrac{1}{2}AB^2 \\
2SH^2 &= SA^2 + SC^2 - \tfrac{1}{2}AC^2 \\
2SK^2 &= SB^2 + SC^2 - \tfrac{1}{2}BC^2
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
2(SE^2 + SF^2 + SG^2 + SH^2 + SJ^2 + SK^2) &= 3(SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(DA^2 + DB^2 + DC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2) \\
&= SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2 \\
&= \tfrac{1}{4}(DA^2 + DB^2 + DC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2)
\end{aligned}$$

Die achtfache Quadratensumme der Verbindungslinien des Schwer-

punktes mit den Kantenmitten ist gleich der Summe der Quadrate über den Kanten.

Es bedarf wol kaum einer Erwähnung, dass die abgeleiteten Beziehungen auch für die Projectionen der Strecken auf dieselbe Ebene richtig bleiben.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen soll nun die eigentliche Aufgabe die Berechnung des Trägheitsmomentes einer dreiseitigen Pyramide in Angriff genommen werden. Enthalte die Pyramide bei gleicher Dichtigkeit die Masse m.

Das Trägheitsmoment der Pyramide bezogen auf eine durch den Schwerpunkt S gehende Achse h_s wird gleich dem Trägheitsmoment der beiden Teilpyramiden und der beiden Prismen sein, in die eingangs die Pyramide zerlegt wurde.

Heisst in Bezug auf h_s das Moment der gegebenen Pyramide T_s, und wird für dieselbe Achse das Trägheitsmoment der den Ecken $ABCD$ anliegenden Teilkörper entsprechend t_{sa}, t_{sb}, t_{sc}, t_{sd} genannt, so besteht

$$T_s = t_{sa} + t_{sb} + t_{sc} + t_{sd}$$

Die Trägheitsmomente t_{sa} und t_{sc} sind als Trägheitsmomente von halben Parallelepipeda für Achsen, die durch den Schwerpunkt S der ganzen Parallelepipeda gehen, sofort ihrem Werte nach anzugeben.

Wird durch sa die Projection der Strecke SA auf eine zu h_s senkrechte Ebene bezeichnet, und haben die Strecken die durch kleine Buchstaben angegeben werden, entsprechende Bedeutung, so ist

$$t_{sa} = \frac{\frac{3}{8}m}{12}(se^2 + sf^2 + sg^2 + sa^2)$$

$$t_{sb} = \frac{\frac{3}{8}m}{12}(sh^3 + si^2 + sk^2 + sc^2)$$

Die Trägheitsmomente der Teilpyramiden an den Ecken B und D bezogen auf h_s nämlich t_{sb} und t_{sd} sind gleich den Trägheitsmomenten t_b und t_d dieser Pyramiden für die durch B und D parallel zu h_s gezogenen Achsen h_b und h_d. Heisst nämlich das Moment der Teilpyramide $DEFG$ für die an h_s parallele Achse h_n durch den Schwerpunkt N dieser kleinen Pramide t_n, so haben die Achsen h_s und h_d von h_n gleichen Abstand u, weil $ND = NS$ ist, und es wird

$$t_{sd} = t_d = t_n + \tfrac{1}{8}mu^2$$

Analog zeigt man die Gleichheit von t_{sb} und t_b.

Die Teilpyramiden an den Ecken B und D liegen zu der ganzen Pyramide in Bezug auf die Ecken Achsen h_b und h_d ähnlich, und da die Pyramide ebenfalls ähnlich sind, so besteht, wenn die Trägheitsmomente der ganzen Pyramide für h_b und h_d mit T_b und T_d bezeichnet werden

$$T_b = 2^5 t_b \qquad T_d = 2^5 t_d$$

und da nach dem Huyghens'schen Satze

$$T_b = T_s + m\,sb^2$$
$$T_d = T_s + m\,sd^2$$

so findet man für das Trägheitsmoment der ganzen Pyramide

$$T_s = \frac{1}{32} m(se^2 + sf^2 + sg^2 + sh^2 + si^2 + sk^2 + sa^2 + sc^2)$$
$$+ \frac{1}{16} T_s + \frac{1}{32} m(sb^2 + sd^2)$$

$$T_s = \frac{1}{30} m(se^2 + sf^2 + sg^2 + sh^2 + si + sk^2 + sa^2 + sb^2 + sc^2 + sd^2)$$

und weil

$$2(se^2 + sf^2 + sg^2 + sh^2 + si^3 + sk^2) = sa^2 + sb^2 + sc^2 + sd^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(da^2 + db^2 + dc^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

$$T_s = \frac{1}{10} m(se^2 + sf^2 + sg^2 + sh^2 + si^2 + sk^2)$$
$$= \frac{1}{20} m(sa^2 + sb^2 + sc^2 + sd^2)$$
$$= \frac{1}{80} m(da^2 + db^2 + dc^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

Hieraus gehen die Sätze hervor:

Das Trägheitsmoment einer dreiseitigen Pyramide für eine beliebige Schwerpunktsachse ist gleich

1) dem Producte aus der Masse in den 10ten Teil der Quadratensumme der Projectionen der Transversalen vom Schwerpunkt nach den Mitten der Kanten,

2) dem Producte aus der Masse in den 20ten Teil der Quadratensumme der Projectionen der Transversalen vom Schwerpunkte nach den Ecken,

3) dem Producte aus der Masse in den 80ten Teil der Quadratensumme der Projectionen der Kanten,

wenn die Projectionen erfolgen auf eine zu der Momentenachse senkrechte Ebene.

Wegen der Relation

$$da^2 + db^2 + dc^2 = 3do^2 + \frac{1}{3}(ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

kann man auch schreiben

$$T_s = \frac{1}{60} m(ab^2 + bc^2 + ca^2) + \frac{3}{80} m\, do^2$$

Ist h_s der Kante DA parallel, so ist

$$da = 0, \quad dc = ac, \quad db = ab$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{80} m(2\, db^2 + 2\, dc^2 + bc^2) = \frac{1}{40} m(2dk^2 + bc^2)$$

Wird DA zur Momentenachse, so ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$T_s + m\left(\frac{dk}{2}\right)^2 = \frac{1}{40} m(12\, dk^2 + bc^2) = \frac{1}{20} m(3db^2 + 3dc^2 - bc^2)$$

Für die Schwerpunktstransversale DO wird das Trägheitsmoment, da $sd = 0$ und $sa^2 + sb^2 + sc^2 = \frac{1}{3}(ab^2 + bc^2 + ea^2)$ ist

$$T_s = \frac{1}{60} m(ab^2 + bc^2 + ca^2) = \frac{1}{3} m(oh^2 + bi^2 + ok^2)$$

Fällt die Achse mit der Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenkanten mit FH zusammen, so ist das Moment

$$\frac{1}{10} m(se^2 + sg^2 + si^2 + sk^2) = \frac{1}{5} m(se + cg^2)$$

Wird die Schwerpunkstransversale einer Begrenzungsfläche DK Momentenachse, so ist das Trägheitsmoment

$$\frac{1}{40} m(3ak^2 + 3ck^2 - ac^2 + 3ak^2 + 3bk^2 - ab^2)$$

$$= \frac{1}{40} m\left(6\, ak + \frac{6}{4} bc^2 - ac^2 - ab^2\right) = \frac{1}{40} m\left[\frac{3}{2}(2ac^2 + 2ab^2 - bc^2)\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} bc^2 - ac^2 - ab^2\right] = \frac{1}{20} m(ac^2 + ab^2)$$

Für die zu h_s parallele Eckenachse durch D findet man

$$T_s = \frac{1}{80} m(da^2 + db^2 + dc^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2) + m\,sd^2$$

und weil

$$16\,sd^2 = 3(da^2 + db^2 + dc^2) - (ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

$$T_s = \frac{1}{20} m(da^2 + db^2 + dc^2) + \frac{4}{5} m\,sd^2$$

$$= \frac{1}{20} m(da^2 + db^2 + dc^2 + 9do^2)$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen elliptischen Kegels.

Man zerlege den Kegel, der bei gleicher Dichtigkeit die Masse m enthalte, durch Achsenschnitte in eine gerade Anzahl ($n = 2p$) gleicher Ausschnitte von der Masse $\frac{m}{n}$ (Fig. 9).

Legt man durch den Schwerpunkt S des Kegels, der die Achse nach dem Verhältniss 1 : 3 teilt, eine beliebige Momentenachse, so ist für diese Achse das Trägheitsmoment des Kegels gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Ausschnitte. Heissen die Schwerpunkte von zwei sich diametral gegenüberliegenden Ausschnitten AB_1C_1D, AB_2C_2D bezüglich P_1 und P_2, so sind die Trägheitsmomente dieser Ausschnitte, welche bei grossem n als schmale dreiseitige Pyramiden aufgefasst werden können, für die durch P_1 und P_2 zu h_s parallelen Achsen h_{p_1} und h_{p_2}, wenn die Projectionen der Kanten auf eine zu h_s senkrechte Ebene mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden

$$t_{p_1} = \frac{1}{80} \frac{m}{n} (ab_1^2 + ac_1^2 + ad^2 + b_1c_1^2 + c_1d^2 + db_1^2)$$

$$t_{p_2} = \frac{1}{80} \frac{m}{n} (ab_2^2 + ac_2^2 + ad^2 + b_2c_2^2 + c_2d^2 + db_2^2)$$

Bezogen auf die Achse h_s wird die Summe der Trägheitsmomente der beiden Ausschnitte, deren Grundflächen B_1C_1D und B_2C_2D congruent sind, angegeben durch

$$ts_1 = \frac{1}{80} \frac{m}{n} [(ab_1^2 + ab_2^2) + (ac_1^2 + ac_2)^2 + 2ad^2 + 2b_1c_1^2 + 2c_1d^2 + 2db_1^2] + \frac{m}{n}(p_1s^2 + p_2s^2)$$

wenn $p_1 s$ und $p_2 s$ die Abstände der Achsen h_{p_1} und h_{p_2} von h_s bezeichnen.

Heissen O_1 und O_2 die Schwerpunkte der congruenten Flächen B_1C_1D und B_2C_2D, so teilen P_1 und P_2 die Strecken AO_1 und AO_2 nach dem Verhältniss $1:3$, und weil auch $DS = \frac{1}{4}AS$ ist, so wird

$$P_1S = \tfrac{3}{4}O_1D \quad \text{und} \quad P_2S = \tfrac{3}{4}O_2D$$

sein. Nun teilen aber O_1 und O_2 die gleichen Schwerpunktstransversalen DG_1 DG_2 der congruentnn Flächen B_1C_1D und B_2C_2D nach dem Verhältniss $1:2$, so dass

$$O_1D = \tfrac{2}{3}DG_1 \quad \text{und} \quad P_1S = P_2S = \tfrac{1}{2}DG_1$$

ist. Für die Dreiecke B_1C_1D; C_1AC_2 und B_1AB_2 bestehen ferner die Beziehungen

$$4DG_1{}^2 = 2B_1D^2 + 2C_1D^2 - B_1C_1{}^2$$
$$AC_1{}^2 + AC_2{}^2 = 2C_1D^2 + 2AD^2$$
$$AB_1{}^2 + AB_2{}^2 = 2B_1D^2 + 2AD^2$$

Beachtet man, dass die letzten vier Gleichungen auch für die Projectionen bestehen bleiben, dass also die Relationen gelten

$$p_1{}^s = p_2{}^s = \tfrac{1}{2}dg_1$$

$$4ad_1{}^2 = 2b_1d^2 + 2c_1d^2 - b_1c_1$$
$$ac_1{}^2 + ae_2{}^2 = 2c_1d^2 + 2d^2$$
$$ab_1{}^2 + ab_2{}^2 = 2b_1d^2 + 2ad^2$$

so kann nunmehr der Ausdruck für t_{s_1} in die Form gebracht werden

$$t_{s_1} = \frac{1}{80}\,\frac{m}{n}\,(2b_1c_1{}^2 + 4b_1d^2 + 4dc_1{}^2 + 6ad^2) + \frac{1}{2}\,\frac{m}{n}\,dg_1{}^2$$
$$= \frac{1}{80}\,\frac{m}{n}\,(8b_1d^2 + 8dc_1{}^2 + 32dg_1{}^2 + 6ad^2)$$

Für den Grenzfall $n = \infty$ wird

$$b_1d = dc_1 = dg_1$$

gleich dem Radiusvector r_1 der Projection des Halbmessers des Ellipsenausschnittes, der als Grundfläche zu dem betrachteten Kegelausschnitt gehört; die Projection erfolgt hierbei auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Es nimmt für diesen Grenzfall t_{s_1} den Wert an

$$t_{s_1} = \frac{3}{5}\frac{m}{n}r_1^2 + \frac{3}{40}\frac{m}{n}ad^2$$

Für die folgenden Paare von Kegelausschnitten erhält man die entsprechenden Werte für die Trägheitsmomente

$$t_{s_2} = \frac{3}{5}\frac{m}{n}r_2^2 + \frac{3}{40}\frac{m}{n}ad^2$$

.

.

.

$$t_{sn} = \frac{3}{5}\frac{m}{n}r_n^2 + \frac{3}{40}\frac{m}{n}ad^2$$

Durch Summation dieser Gleichungen findet man das doppelte Trägheitsmoment des Kegels für eine beliebige Schwerpunktsachse h_s

$$2T_s = \frac{3}{5}\frac{m}{n}(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2) + \frac{3}{40}m \cdot ad^2$$

und da auch hier wie bei der Ellipse und dem Cylinder

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \tfrac{1}{2}n(\varrho^2 + \tau^2)$$

so hat man, wenn noch $ad = d$ gesetzt wird

$$T_s = \frac{3}{20}m(\varrho^2 + \tau^2) + \frac{3}{80}m \cdot d^2;$$

ϱ und τ bezeichnen in dieser Formel die Projectionen von zwei conjugirten Halbachsen der Grundfläche, d die Projection der Achse des Kegels auf ein zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Geht die Ache durch den Schwerpunkt D der Grundfläche, so ist

$$T_d = \frac{3}{20}m(\varrho^2 + \tau^2) + \frac{1}{10}m \cdot d^2$$

Für eine Achse durch die Spitze A ist das Trägheitsmoment

$$T_a = \frac{3}{20}m(\varrho^8 + \tau^2) + \frac{3}{5}md^2$$

Wird die Achse des Kegels AD zur Momentenachse, so wird das Moment angegeben durch

$$T_{ad} = \frac{3}{20}m(\varrho^2 + \tau^2)$$

welches für den Rotationskegel (r = Radius des Grundkreises) übergeht in

$$T_{ad} = \frac{3}{30} mr^2$$

Für einen Durchmesser der Grundfläche als Achse findet man den Wert des Trägheitsmomentes

$$T = \frac{3}{20} m(l^2 + n^2) + \frac{1}{10} md^2$$

wenn l und n die Abstände der Endpunkte conjugirter Durchmesser der Grundfläche von der Momentenachse angeben.

Für die Hauptachsen (p und q Hauptachsen) hat man die Werte

$$T_p = \frac{3}{20} mq^2 + \frac{1}{10} md^2, \quad T_q = \frac{3}{20} mp^2 + \frac{1}{10} md^2$$

ist $p = q = r$, so geht der elliptische Kegel zum Rotationskegel über, dessen Trägheitsmoment in diesem Falle angegeben wird durch

$$T_r = \frac{3}{20} mr^2 + \frac{1}{10} md^2$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen Ellipsoides

Man denke sich das Ellipsoid (Fig. 10), welches bei gleicher Dichtigkeit die Masse m enthalten möge, durch Ebenen durch den Mittelpunkt in $n = 3p$ (d. h. durch 3 teilbar) unter sich gleiche Ausschnitte von der Masse $\frac{m}{n}$ geteilt.

Für eine durch den Mittelpunkt (Schwerpunkt S des Ellipsoides gehende Achse, wird das Trägheitsmoment des Ellipsoides gleich der Summe der Trägheitsmomente der n einzelnen Ausschnitte sein. Wird die Anzahl dieser Ausschnitte aber gross genommen, so kann jeder als eine schmale dreiseitige Pyramide mit kleiner Grundfläche angesehen werden. Nach dem Früheren wird aber das Trägheitsmoment einer dreiseitigen Pyramide $SABC$ für die Eckenachse h_s, wenn sa, sb, sc, so die Abstände der drei Eckpunkte ABC und des Schwerpunktes O der Grundfläche ABC von der Momentenachse bezeichnen, oder wenn sa, sb, sc, so die Projectionen von SA, SB, SC und SO sind, angegeben durch

$$t_s = \frac{1}{20} m(sa^2 + sb^2 + sc^2 + 9so^2)$$

Wird die Anzahl der Ausschnitte des Ellipsoides unendlich gross, so ist das Trägheitsmoment des ersten Ausschnittes

$$t_{s_1} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_1^2$$

weil für die Grenze $n = \infty$ die Abstände

$$sa = sb = sc = so$$

gleich sind der Projection r_1 des Radiusvector nach dem Oberflächen-Element, welches die Grundfläche der ersten Teilpyramide bildet, auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Für die folgenden Ellipsoidenausschnitte erhält man in Bezug auf dieselbe Achse h_s entsprechende Werte

$$t_{s_2} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_2^2$$

.

.

.

$$t_{sn} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_n^2$$

woraus man durch Addition das Trägheitsmoment T_s des Ellipsoides findet

$$T_s = \frac{3}{5} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)$$

Nun lassen sich die n Quadrate der Projectionen der Radienvectoren des Ellipsoides so anordnen, dass jedesmal die Projectionen von drei conjugirten Halbachsen zusammenstehen, und da die Quadratensumme der Projectionen von drei conjugirten Halbachsen nach Salmon-Fiedler 3. Auflage 1879 Art. 99, auf eine beliebige Ebene constant *) ist, so hat man

---

*) Für das Ellipsoid ist ein ganz elementarer Beweis wol kaum zu erbringen. Hier möge der Satz für die Kugel bewiesen werden. Es stehen bei der Kugel die conjugirten Halbachsen (Radien) senkrecht zu einander. Bildet die Momentenachse h_s mit einem beliebigen System conjugirter Radien die Winkel $\alpha\beta\gamma$, so ist

$$\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = r^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 3r^2 - r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \tfrac{1}{5} n(\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)$$

wenn ϱ, σ, τ die Projectionen von drei beliebigen conjugirten Halbachsen des gegebenen Ellipsoides auf eine zu der Momentenachse h_s senkrechte Ebene bezeichnen, und es wird

$$T_s = \tfrac{1}{5} m(\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)$$

Für die Hauptachsen a, b, c des Ellipsoides hat man die Trägheitsmomente

$$T_a = \tfrac{1}{5} m(b^2 + c^2)$$
$$T_b = \tfrac{1}{5} m(c^2 + a^2)$$
$$T_c = \tfrac{1}{5} m(a^2 + b^2)$$

Das Trägheitsmoment für einen Durchmesser der Kugel hat den speciellen Wert

$$T_r = \tfrac{2}{5} mr^2$$

Fällt man um den beliebigen Punkt P der Momentenachse auf die Ebene durch je zwei Radien die Lote PP_1, PP_2, PP_3 so besteht, wenn S der Mittelpunkt der Kugel ist,

$$SP^2 = SP_1^2 + SP_2^2 + SP_3^2$$

woraus folgt

$$\frac{SP_1^2 + SP_2^2 + SP_3^2}{SP^2} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

so dass

$$\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 2r^2$$

ist und T_s den Wert annimmt

$$T_s = \tfrac{2}{5} mr^2$$

III.

Ueber goniometrische Relationen, die bei der Kreisteilung auftreten.

Von

Prof. Dr. **B. Sporer** in Ehingen (Würtemberg.)

I. Ueber gewisse Functionen.

Durch den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems sei eine „ungerade Anzahl von n Geraden gelegt, die den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile zerlegen." Deren Gleichungen mögen sein:

$$\left.\begin{array}{lll} L_1 = x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1 = 0 & \text{wo} & \alpha_1 = \alpha \\ L_2 = x\sin\alpha_2' - y\cos\alpha_2 = 0 & & \alpha_2 = \alpha + \frac{2\pi}{n} \\ L_3 = x\sin\alpha_3 - y\cos\alpha_3 = 0 & & \alpha_3 = \alpha + \frac{4\pi}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ L_n = x\sin\alpha_n - y\cos\alpha_n = 0 & & \alpha_n = \alpha + \frac{2(n-1)}{n} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Coordinaten eines beliebigen Punktes ein, so stellen die sich ergebenden Werte L_1', L_2', L_3' . . . L_n' die Entfernungen dieses Punktes von den Geraden L dar, und zwar haben alle Punkte auf der einen Seite einer dieser Geraden positive Entfernungen und alle auf der andern Seite negative solche Entfernungen, und wir können gewissermassen von einer positiven und einer negativen Seite dieser Geraden reden. Beschreiben wir

um den Ursprung einen Kreis und bezeichnen die verschiedenen Seiten die Geraden L längs dieses Kreises durch die Zeichen $+$ und $-$, so erhalten wir die durch die Figur 1 ersichtliche Anordnung und es tritt also in Bezug auf diese Zeichen längs des Kreises eine gewisse Symmetrie auf, die wir als **cyklische Symmetrie** bezeichnen wollen.

Es möge nun etwa die Function

$$\left.\begin{aligned} F(L) &= L_1^p + L_2^p + L_3^p + \ldots + L_n^p \\ &= \Sigma L^p = \Sigma(x \sin\alpha - y \cos\alpha)^p \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

gegeben sein. Setzen wir hier den Wert der Function gleich einer Constanten A, so erhalten wir die Gleichung

$$F(L) = A$$

die im allgemeinen eine Curve des $p$ten Grades darstellt, etwa eine Curve C^p. Diese letztere Curve hat aber offenbar die Halbirungslinien der Winkel, die je zwei aufeinanderfolgende Geraden L mit einander bilden, zu Symmetrieachsen. Seien nämlich P_1 und P_2 zwei zu einer dieser Halbirungslinien symmetrische Punkte, so sind die zu diesen Punkten gehörigen Werte $F(L)$ dieselben, indem die Entfernungen dieser Punkte von den Geraden L, abgesehen von einer Vertauschung unter denselben, gleich sind und auch mit den Vorzeichen übereinstimmen. Ist p zudem gerade, so sind auch die Geraden L selbst solche Symmetrieachsen, indem je zwei einer Geraden L symmetrisch gelegene Punkte P_1 und P_3 von den Geraden L ebenfalls entsprechend gleiche Entfernungen haben, die Verschiedenheit einzelner Vorzeichen aber ohne Einfluss ist.

Diese Eigenschaft beschränkt sich aber keineswegs auf das oben gewählte Beispiel einer solchen Function, sondern wir werden vielmehr eine beliebig grosse Menge solcher, in den Werten L homogener Functionen aufstellen können, die alle gleich Constanten gesetzt im allgemeinen Curven darstellen, die n oder $2n$ Symmetrieachsen haben, je nachdem die Function von ungerader oder von gerader Ordnung ist. Eine solche Function, die auf diese Eigenschaften führt, möge kurz eine **cyklisch-symmetrische** Function der L genannt sein. In Bezug auf den Wert p haben wir weiter verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I. **Fall:** p **ungerade und** $< n$.

Bleiben wir bei dem obigen Beispiel. Die Gleichung

$$F(L) = 0$$

ist dann von ungeradem Grade und muss also notwendig einen reellen Factor $ax + by$ enthalten. Da das durch die Gleichung dargestellte System von Geraden aber n Symmetrieachsen besitzt, liefert die Gerade $ax + by = 0$ wenigstens weitere $n - 1$ Geraden, die gleichfalls in $F(L) = 0$ als Factoren enthalten sein müssten. Dies ist aber nicht möglich, da $F(L)$ nur vom Grade p ist. Hieraus folgt aber, dass die Function $F(L)$ identisch verschwinden muss; oder:

„Jede cyklisch-symmetrische Function von ungerader Ordnung „kleiner als n verschwindet stets identisch."

II. Fall: $n = p$.

Ist dagegen $n = p$, so wird es möglich sein solche n lineare Factoren zu erhalten, die n Gerade mit n Symmetrieachsen darstellen. Aber auch jetzt noch werden diese Geraden mit den Geraden L oder aber den Symmetrieachsen selbst zusammenfallen müssen, indem für eine andere Annahme einer solchen Geraden, unmittelbar $2n$ solcher Geraden aus den obigen Symmetrien sich ergeben. Kehren wir jetzt zu unserer Figur zurück und nehmen an, die Geraden

$$ax + by = 0$$

fallen auf die Symmetrieachsen, so wären diese Geraden aber Asymptoten der Curven $F(L) = A$, und aus ihrer Eigenschaft als Symmetrieachsen würde unmittelbar folgen, dass sie zugleich Rückkehrtangenten für Rückkehrpunkte auf der unendlich fernen Geraden wären. Auf dieser letzteren müssten also n solche Rückkehrpunkte liegen, und das ist unmöglich. Die Geraden

$$ax + by = 0$$

müssen also notwendig auf die Geraden L selbst fallen, oder:

„Jede cyklisch-symmetrische Function vom Grade n zerfällt in „das mit einem constanten Factor multiplicirte Product der Ge„raden L."

III. Fall: p gerade und $< 2n$.

Setzen wir auch hier die Function $F(L) = 0$, so muss dieselbe in $p/_2$ Factoren $ax^2 + bxy + cy^2$ fallen. Aus den $2n$ Symmetrien folgt aber, dass diese Factoren mindestens in die Zahl n auftreten müssten, wenn sie nicht die Form $x^2 + y^2$ haben. Da das erstere nicht sein kann ist nur das zweite möglich, aber dann ist die Gleichung

$$F(L) = a(x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}}$$

gültig und wir erhalten:

„Für gerade $p < 2n$ ist jede cyklisch-symmetrische Function „der Ordnung p gleich einer mit einer Constanten multiplicirten „Potenz von $x^2 + y^2$, und dieselbe gleich einer Constanten gesetzt „stellt p_2 concentrische Kreise dar.“

IV Fall: p ungerade und $> n$ oder p gerade und $\geqq 2n$.

Ganz gleicherweise finden wir für ungerade $p > n$, dass die gleich null gesetzte Function, wenn $p < 2n$ ist, in die Geraden L und eine Potenz von $x^2 + y^2$ zerfällt. In allen andern Fällen aber wird $F(L) = 0$ nur aus den Factoren L, aus Gruppen von 2n Factoren $ax + by$ und aus Factoren $x^2 + y^2$ bestehen können. Wir werden uns jedoch auf die drei ersten Fälle beschränken.

Ist n gerade, so fallen je zwei Geraden L aufeinander, für ungerade p tritt keine Symmetrie auf, aber wir werden doch auch hier von $F(L)$ behaupten können, dass es oft verschwindet, indem die Glieder sich dann paarweise aufheben. Ist dagegen p gerade, so ist die Zahl der Symmetrieachsen gleich n und wir erhalten für die Gültigkeit des Satzes in Fall III. die Bedingung $p < u$.

II. Goniometrische Gleichungen.

1) Möge das Zeichen $\equiv$ identisch gleich null bedeuten. Aus dem Satze im ersten Fall in I. folgt aber für $p = 2q + 1$ unmittelbar die Gleichung

$$\Sigma(x \sin\alpha - y \cos\alpha)^{2q+1} \equiv 0, \quad \text{für} \quad 2q + 1 < n \tag{3}$$

Geben wir hier q nach einander die Werte 0, 1, 2, 3 . . . und setzen die Coefficienten gleich null, so erhalten wir aber:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\sin\alpha &= \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \ldots + \sin\alpha_n = 0 \\
\Sigma\sin^3\alpha &= \sin^3\alpha_1 + \sin^3\alpha_2 + \sin^3\alpha_3 + \ldots + \sin^3\alpha_n = 0 \\
\Sigma\sin^5\alpha &= \sin^5\alpha_1 + \sin^5\alpha_2 + \sin^5\alpha_3 + \ldots + \sin^5\alpha_n = 0 \\
\Sigma\sin^7\alpha &= \sin^7\alpha_1 + \sin^7\alpha_2 + \sin^7\alpha_3 + \ldots + \sin^7\alpha_n = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

u. s. w. für Exponenten $<$ n. Ebenso ist

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\cos\alpha &= \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n = 0\\ \Sigma\cos^3\alpha &= \cos^3\alpha_1 + \cos^3\alpha_2 + \ldots + \cos^3\alpha_n = 0\\ \Sigma\cos^5\alpha &= \cos^5\alpha_1 + \cos^5\alpha_3 + \ldots + \cos^5\alpha_n = 0\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

u. s. w. für Exponenten $< n$.

Ausser diesen Relationen erhalten wir aus der Gleichung z. B. noch:

$$\Sigma\sin\alpha^r\cos\alpha^s = \cos^r\alpha_1\sin^s\alpha_1 + \cos^r\alpha_2\sin^s\alpha_2 + \ldots + \cos^r\alpha_n\sin^s\alpha_n = 0$$

wo
$$r + s = 2q + 1$$

also eine ungerade Zahl $< n$ ist. Ueberhaupt können wir aus dem in Fall I. Bemerkten schliessen, dass jeder solche cyklisch-symmetrische Ausdruck, der in den Werten $\cos\alpha$ vom Grade r und in den Werten $\sin\alpha$ vom Grade s ist, gleich null wird, wenn $r+s$ ungerade und $< n$ ist.

2) Ist p gerade $= 2q$ und $< 2n$, so sehen wir, dass z. B. die Gleichung

$$\Sigma(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^{2q} \equiv a(x^2 + y^2)^q$$

gültig ist, wobei a eine bestimmte Constante ist. Entwickeln wir beiderseits nach dem binomischen Satze, so erhalten wir

$$x^{2q}\Sigma\sin^{2q}\alpha - \binom{2q}{1}x^{2q-1}\Sigma\sin^{2q-1}\alpha\,.\,\cos\alpha + \binom{2q}{2}\Sigma\sin^{2q-2}\alpha\,.\,\cos^2\alpha$$
$$- \ldots \equiv a\left(x^{2q} + \binom{q}{1}x^{2q-2}y^2 + \binom{q}{2}x^{2q-4}y^4 + \ldots\right)$$

und hieraus durch Gleichsetzung der Coefficienten rechts und links:

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\sin^{2q}\alpha = a\\ &\Sigma\sin^{2q-1}\alpha\,.\,\cos\alpha = 0\\ &\Sigma\sin^{2q-2}\alpha\,.\,\cos^2\alpha = \frac{\binom{q}{1}}{\binom{2q}{2}}\,.\,a\\ &\Sigma\sin^{2q-3}\alpha\,.\,\cos^3\alpha = 0\\ &\Sigma\sin^{2q-4}\alpha\,.\,\cos^4\alpha = \frac{\binom{q}{2}}{\binom{2q}{4}}\,.\,a \quad \text{u. s. w.}\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Nun ist aber auch

$$\Sigma(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^q = n$$

oder entwickelt:

$$\Sigma\sin^{2q}\alpha + \binom{q}{1}\Sigma\sin^{2q-2}\alpha \,.\, \cos^2\alpha + \binom{q}{2}\Sigma\sin^{2q-4}\alpha \,.\, \cos^4\alpha + \ldots = n$$

Setzen wir aber hierin die in Gl. (6) erhaltenen Werte ein, so finden wir für a den Wert

$$a = \frac{n}{\frac{\binom{q}{0}^2}{\binom{2q}{0}} + \frac{\binom{q}{1}^2}{\binom{2q}{2}} + \frac{\binom{q}{2}^2}{\binom{2q}{4}} + \ldots + \frac{\binom{q}{q}^2}{\binom{2q}{2q}}} = n \,.\, \varphi(q)^1 \qquad (7)$$

Nach den Gleichungen (6) ist aber auch

$$\Sigma\sin^{2q-2} \,.\, \cos^2\alpha = \frac{\binom{q}{1}}{\binom{2q}{2}} \,.\, \varphi(q) \,.\, n$$

Setzen wir hierin für $\cos^2\alpha$ aber $1-\sin^2\alpha$, so erhalten wir

$$\Sigma\sin^{2q-2}\alpha^0 - \Sigma\sin^{2q} = n \,.\, \varphi(q-1) - n \,.\, \varphi(q) = \frac{\binom{q}{1}}{\binom{2q}{1}} \,.\, n \,.\, \varphi(q)$$

und also:

$$\varphi(q) = \frac{2q-1}{2q} \,.\, \varphi(q-1)$$

Es ist aber unmittelbar:

$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}$$

also

$$\varphi(2) = \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}, \qquad \varphi(3) = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}$$

und allgemein

$$\varphi(q) = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\,.\,.\, 2q-1}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\,.\,.\, 2q} \qquad (8)$$

Geben wir jetzt q nach einander den Wert 1, 2, 3, 4, 5 . . . , so finden wir ferner

$$\sin^2\alpha = \sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3 + \ldots + \sin^2\alpha_n = \frac{1}{2} \,.\, n \Big\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\sin^4\alpha &= \sin^4\alpha_1+\sin^4\alpha_2+\sin^4\alpha_3+\ldots+\sin^4\alpha_n \\ &= \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,n \\ \Sigma\sin^6\alpha &= \sin^6\alpha_1+\sin^6\alpha_2+\sin^6\alpha_3+\ldots+\sin^6\alpha_n \\ &= \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,n\end{aligned}\right\}\qquad (9$$

u. s w. Ebenso wird

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\,.\,n,\quad \Sigma\cos^4\alpha = \Sigma\sin^4\alpha = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,n \\ &\Sigma\cos^6\alpha = \Sigma\sin^6\alpha = \frac{1\,.\,2\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,n\end{aligned}\right\}\qquad (10)$$

u. s. w. für Exponenten $< 2n$.

3) Es ist auch

$$\cos^{n-2}\alpha\,.\,\sin^2\alpha = \cos^{n-2}\alpha(1-\cos^2\alpha) = \cos^{n-2}\alpha - \cos^n\alpha$$

$$\cos^{n-4}\alpha\,.\,\sin^4\alpha = \cos^{n-4}\alpha - \binom{2}{1}\cos^{n-2}\alpha + \cos^n\alpha$$

$$\cos^{n-6}\alpha\,.\,\sin^6\alpha = \cos^{n-6}\alpha - \binom{3}{1}\cos^{n-4}\alpha + \binom{3}{2}\cos^{n-2}\alpha - \cos^n\alpha$$

und allgemein

$$\cos\alpha^{n-2q}\,.\,\sin^{2q}\alpha = \cos^{n-2q}\alpha - \binom{q}{1}\,.\,\cos^{n-2q+2}\alpha + \binom{q}{2}\cos^{n-2q+4}\alpha - \ldots + (-1)^q\,.\,\cos^n\alpha$$

Ist n ungerade, und geben wir α nach einander die Werte α_1 α_2, α_3 . . . α_n und addiren, so folgt aus der letzten Gleichung, da alle Werte $\Sigma\cos^{n-2p}$ verschwinden (Gl. 4):

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\cos^{n-2q}\alpha\,.\,\sin^{2q}\alpha = (-1)^q\,.\,\Sigma\cos^n\alpha \\ &\text{Ganz ebenso finden wir} \\ &\Sigma\sin^{n-4q}\alpha\,.\,\cos^{2q}\alpha = (-1)^q\,.\,\Sigma\sin^n\alpha\end{aligned}\right\}\qquad (11)$$

Weiterhin ist aber

$$\cos n\alpha = \cos^n - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\,.\,\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\,.\,\sin^4\alpha - \ldots$$

Ist auch hier n ungerade und setzen wir wieder für α nacheinander die Werte α_1, α_2 . . . und addiren, so folgt aber, da $\cos n\alpha_1 = \cos n\alpha_2 = \cos n\alpha_3 = \ldots$ ist, mittelst der Gleichungen (11):

$$n \cos n\alpha = \left\{1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots\right\} \Sigma \cos n\alpha$$

oder da der Ausdruck in der Klammer $\frac{1}{2}(1+1)^n = 2^{n-1}$ ist:

$$n \,.\, \cos n\alpha = 2^{n-1} \,.\, \Sigma \cos^n \alpha$$

Oder wir halten

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma \cos^n \alpha = \cos^n \alpha_1 + \cos^n \alpha_2 + \ldots + \cos^n \alpha_n = \frac{n \,.\, \cos n\alpha}{2^{n-1}} \\ &\text{und ebenso:} \\ &\Sigma \sin^n \alpha = \sin^n \alpha_1 + \sin^n \alpha_2 + \ldots + \sin^n \alpha_n \\ &\qquad = \frac{n \,.\, \sin n\alpha}{2^{n-1}} \,.\, (-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Kehren wir jetzt zu der Gleichung

$$\Sigma L^n = \Sigma(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^n = k$$

zurück, wo k eine Constante ist, und entwickeln, so erhalten wir aber

$$x^n \Sigma \sin^n \alpha - \binom{n}{1} x^{n-1} y \,\Sigma \sin^{n-1} \alpha \,.\, \cos \alpha$$
$$+ \binom{n}{2} x^{n-2} \,.\, y^2 \Sigma \sin^{n-2} \alpha \,.\, \cos^2 \alpha - \ldots = k$$

und hieraus durch Benutzung der Gleichungen (11) und (12):

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^n \equiv \left\{x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} \,.\, y^2 \right. \\ &\qquad \left. + \binom{n}{4} x^{n-4} \,.\, y^4 - \ldots \right\} \frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}} \,.\, n(-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ &- \left\{y^n - \binom{n}{2} y^{n-2} \,.\, x^2 + \binom{n}{4} \,.\, y^{n-5} \,.\, x^4 - \ldots \right\} \\ &\qquad .\, \frac{\cos n\alpha}{2^{n-1}} \,.\, n = k \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Nach dem Fall III. in I. fanden wir aber, dass ΣL^n in das mit einer Constanten ε multiplicirte Product ΠL der Geraden L zerfallen muss, und wir haben also:

$$\Sigma L^n \equiv \varepsilon \,.\, \Pi L \qquad (14)$$

Hieraus folgt aber zur Bestimmung der Constanten ε, wenn wir auch die Producte aus den Werten $\sin \alpha$ resp. $\cos \alpha$ mit $\Pi \sin \alpha$ und $\Pi \cos$ bezeichnen:

$$\Sigma \sin^n \alpha = \varepsilon \,.\, \Pi \sin \alpha \quad \text{und} \quad \Sigma \cos^n \alpha = \varepsilon \,.\, \Sigma \cos \alpha$$

Aus Gl. (13) erhalten wir nun weiter

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \,.\, \Pi \sin \alpha &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \frac{n \,.\, \sin n\alpha}{2^{n-1}} \\ \varepsilon \,.\, \Pi \cos \alpha &= \frac{n \,.\, \cos n\alpha}{2^{n-1}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Nun ist aber auch

$$\varepsilon \,.\, \Pi \sin 2\alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \frac{n \,.\, \sin 2a\alpha}{2^{n-1}} \tag{16}$$

indem die Werte 2α gleichfalls eine Reihe von a Winkeln bilden, welche sich mit den einer Reihe

$$\beta, \quad \beta + \frac{2\pi}{n}, \quad \beta + \frac{4\pi}{n}, \quad \ldots \beta + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

decken, wenn wir für Winkel $> 2\pi$ den um 2π verkleinerten setzen

Durch Multiplication der Gleichungen (15) erhalten wir ferner

$$2^n \,.\, \varepsilon^2 \,.\, \Pi \sin \alpha \,.\, \Pi \cos \alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \frac{n^2 \,.\, \sin 2n\alpha}{2^{n-1}} \tag{17}$$

$\varepsilon = n$, also mittelst Gl. (16):

$$\left.\begin{aligned} \Sigma L^n &\equiv n \Pi L \\ \Pi \sin \alpha &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \frac{\sin n\alpha}{n-1} \\ \Pi \cos \alpha &= + \frac{\cos n\alpha}{2^{n-1}} \\ \Pi \tang \alpha &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \tang n\alpha \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Ausserdem erhalten wir noch die interessanten Relationen:

$$\left.\begin{aligned} 1 \quad \Sigma \sin^n \alpha - n \,.\, \Pi \sin \alpha &= 0 \\ \Sigma \cos^n \alpha - n \,.\, \Pi \cos \alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

So ist z. B. für $n = 3$:

$$\left.\begin{aligned}&\sin^3\alpha+\sin^3\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^3\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)-3\sin\alpha\,.\,\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\\&\qquad\qquad .\ \sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0\\&\cos^3\alpha+\cos^3\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^3\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)-3\cos\alpha\,.\,\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\\&\qquad\qquad .\ \cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Die Gleichung $\Sigma L^n \equiv n\,\Pi L$ können wir aber auch schreiben:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}\,.\,y^2+\binom{n}{4}x^{n-4}\,.\,y^4-\ldots\right\}\frac{n\,.\,\sin n\alpha}{2^{n-1}}$$

$$-\left\{y^n-\binom{n}{2}y^{n-2}\,.\,x^2+\binom{n}{4}y^{n-5}\,.\,x^4-\ldots\right\}\frac{n\,.\,\cos n\alpha}{2^{n-1}}\equiv$$

$$n\,.\,\Pi\sin\alpha(x-y\cot\alpha)\equiv n\,.\,\Pi\cos\alpha(x\tang\alpha-x)$$

$$\equiv\frac{(-1)^{n-1}n\,.\,\sin n\alpha}{2^{n-1}}(x^n-G_1x^{n-1}\,.\,y+G_2x^{n-2}\,.\,y^2-G_3\,.\,x^{n-3}\,.\,y^3+\ldots)$$

$$\equiv-\frac{n\,.\,\cos n\alpha}{2^{n-1}}(y^n-H_1xy^{n-1}+H_2x_2y^{n-2}-H_3x_3y^{n-3}+\ldots)$$

wobei G_1, G_2, G_3 . . . die Summen der Combinationen der ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Classe der Werte $\cot\alpha$ und ebenso H_1, H_2, H_3 die der Werte $\tang\alpha$ sind. Durch Gleichsetzung der Coefficienten rechts und links erhalten wir aber daraus:

$$\left.\begin{aligned}&G_1=+\binom{n}{1}\cot n\alpha \quad\text{und}\quad && H_1=\pm\binom{n}{1}\tang n\alpha\\&G_2=-\binom{n}{2} && H_2=\mp\binom{n}{2}\\&G_3=-\binom{n}{3}\cot n\alpha && H_3=\mp\binom{n}{3}\tang n\alpha\\&G_4=+\binom{n}{4} && H_4=\pm\binom{u}{4}\\&G_5=+\binom{u}{5}\cot n\alpha\ \text{u. s. w.} && H_5=\pm\binom{n}{5}\tang n\alpha\ \text{u. s. w.}\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

4) Die so gefundenen Gleichungen gestatten es uns wieder eine Menge neuer aufzustellen. Auf solche führen uns z. B. die Beziehungen zwischen den Coefficienten einer Gleichung und den

Potenzsummen der Wurzeln der Gleichungen. Bezeichnen wir so die Summen der Combinationen der ersten Classe der Werte $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ mit C_p, so erhalten wir aus den Gleichungen (4) und (9):

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{1\,!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot n(\\
&C_3 = 0, \quad C_4 = -\frac{1}{2\,!} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot n(n-3) \\
&C_5 = 0, \quad C_7 = -\frac{1}{3\,!} \cdot \frac{1}{2^6} \cdot n(n-4)\,(n-5) \\
&C_7 = 0, \quad C_8 = +\frac{1}{4\,!} \cdot \frac{1}{2^8} \cdot n(n-5)\,(n-6)\,(n-7) \\
&C_9 = 0, \quad C_{10} = -\frac{1}{5\,!} \cdot \frac{1}{2^{10}} \cdot n(n-6)\,(n-7)\,(n-8)(n-9)
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

u. s. w. oder auch umgekehrt geordnet:

$$\left.\begin{aligned}
&C_{n-2} = \pm\frac{1}{1\,!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot n \\
&C_{n-3} = \mp\frac{1}{3\,!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot n \,.\, (n^2-1) \\
&C_{n-5} = \pm\frac{1}{5\,!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot n \,.\, (n^2-1)\,(n^2-9) \\
&C_{n-7} = \mp\frac{1}{7\,!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot n \,.\, (n^2-1)\,(n^2-9)\,(n^2-25) \\
&\qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Ebenso erhalten wir, wenn wir die Summen der Combinationen aus den Werten $\sin^2\alpha$ oder $\cos^2\alpha$ der einzelnen Classen durch D_1, D_2, . . . bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned}
&D_1 = \frac{1}{1\,!} \cdot \frac{1}{2\,!} \cdot n \\
&D_2 = \frac{1}{2\,!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot n)\,(2n-3) \\
&D_3 = \frac{1}{3\,!} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot n(2n-4)\,(2n-5)
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$D_4 = \frac{1}{4\,!} \cdot \frac{1}{2^7} \cdot n(2n-5)(2n-6)(2n-7)$$

$$D_5 = \frac{1}{5\,!} \cdot \frac{1}{2^9} \cdot n(2n-6)(2n-7)(2n-8)(2n-9) \qquad (23)$$

u. s. w.

Insbesondere ist

$$D_{n-1} = \frac{n^2}{2^{2n-2}} \qquad (24)$$

5) Bezeichnen wir ebenso die Summen der Combinationen der einzelnen Classen aus den Werten $\frac{1}{\sin\alpha}$ und $\frac{1}{\cos\alpha}$ mit E_1, E_2, E_3 . . . resp. F_1, F_2, F_3 . . . , so erhalten wir weiter:

$$E_1 = \pm \frac{C_{n-1}}{\Pi \sin\alpha} = \frac{n}{\sin n\alpha} \quad \text{und} \quad F_1 = \pm \frac{n}{\cos n\alpha}$$

$$E_2 = \frac{C_{n-2}}{\Pi \sin\alpha} = 0 \qquad F_2 = 0$$

$$E_3 = \frac{C_{n-3}}{\Pi \sin\alpha} = -\frac{n}{3\,!}\,\frac{n^2-1}{\sin n\alpha} \qquad F_3 = \pm \frac{n}{3\,!} \cdot \frac{n^2-1}{\cos n\alpha}$$

$$E_4 = \frac{C_{n-4}}{\Pi \sin\alpha} = 0 \qquad F_4 = 0 \qquad (25)$$

$$E_5 = \frac{C_{n-5}}{\Pi \sin\alpha} = \frac{n}{5\,!} \cdot \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{\sin n\alpha} \quad \text{und}$$

$$F_5 = \pm \frac{n}{5\,!} \cdot \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{\cos n\alpha}$$

$$E_6 = \frac{C_{n-6}}{\Pi \sin\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad F_6 = 0 \quad \text{u. s. f.}$$

6) Die Gleichungen (20) ermöglichen uns es auch Formeln für die Summen der Potenzen der Tangenten und Cotangenten der Winkel α aufzustellen. Durch die oben erwähnten Newton'schen Beziehungen erhalten wir:

$$J_1 = \Sigma \operatorname{tang}\alpha = \binom{n}{1} \operatorname{tang} n\alpha = \pm n \,.\, \operatorname{tang} n\alpha \quad \text{(Euler)} \qquad (26)$$

$$J_2 = \Sigma \operatorname{tang}^2\alpha = \binom{n}{2}^2 \operatorname{tang}^2 n\alpha + 2\binom{n}{2} = n^2 \operatorname{tang}^2 n\alpha + n(n-1)$$

$$\left.\begin{aligned}
J_3 &= \Sigma \operatorname{tang}^3\alpha = \pm \binom{n}{1}^3 \operatorname{tang}^3 n\alpha \pm 3\binom{n}{1}\binom{n}{2} \operatorname{tang} n\alpha \\
&\qquad + 3\binom{n}{3} \operatorname{tang} n\alpha \\
&= \pm n^3 \operatorname{tang}^3 n\alpha \pm n(n^2-1) \operatorname{tang} n\alpha \\
J_4 &= \Sigma \operatorname{tang}^4\alpha = \binom{n}{1}^4 \operatorname{tang}^4 n\alpha + 4\binom{n}{1}^2\binom{n}{2} \operatorname{tang}^2\alpha \\
&\qquad - 4\binom{n}{1}\binom{n}{3} \operatorname{tang}^2 n\alpha + 2\binom{n}{2}^2 - 4\binom{n}{4} \\
&= n^4 \operatorname{tang}^4 n\alpha + \tfrac{4}{3} n^2 (n^2-1) \operatorname{tang}^2 n\alpha \\
&\qquad + \tfrac{1}{3} n(n-1)(n^3+n-3)
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

und so weiter. Ebenso:

$$\left.\begin{aligned}
K &= \Sigma \cot\alpha = + n \cot n\alpha \quad \text{(Euler)} \\
K_2 &= \Sigma \cot^2\alpha = n^2 \cot^2 n\alpha + n(n-1) \\
K_3 &= \Sigma \cot^3\alpha = n^3 \cot^3 n\alpha + n(n^2-1) \cot n\alpha \\
K_4 &= \Sigma \cot^4\alpha = \cot^4 n\alpha + \tfrac{4}{3} n^2 (n^2-1) \cot^2 n\alpha + \tfrac{1}{3} n(n-1) \\
&\qquad . (n^2+n-3) \\
&\text{u. s. f.}
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

7) Desgleichen finden wir mittelst der Gleichungen (25) die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \Sigma \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{n}{\sin n\alpha} \quad \text{(Euler)} \\
M_2 &= \Sigma \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{n^2}{\sin^2 n\alpha} \\
M_3 &= \Sigma \frac{1}{\sin^3\alpha} = \frac{n^3}{\sin^3 n\alpha} - \frac{1}{2}\,\frac{n(n^2-1)}{\sin n\alpha} \\
M_4 &= \Sigma \frac{1}{\sin^4\alpha} = \frac{n^4}{\sin^4 n\alpha} - \frac{2}{3}\,\frac{n^2(n^2-1)}{\sin^2 n\alpha} \\
M_5 &= \Sigma \frac{n^5}{\sin^5 n\alpha} - \frac{5}{6}\,\frac{n^3(n^3-1)}{\sin^3 n\alpha} + \frac{1}{24}\,\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{\sin n\alpha} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Und dann

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= \Sigma \frac{1}{\cos\alpha} = \pm \frac{n}{\cos n\alpha} \quad \text{(Euler)} \\
N_2 &= \Sigma \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{n^2}{\cos^2 n\alpha} \\
N_3 &= \Sigma \frac{1}{\cos^3\alpha} = \pm \frac{n^3}{\cos^3 n\alpha} \mp \frac{n}{2} \frac{(n^2-1)}{\cos n\alpha} \\
N_4 &= \Sigma \frac{1}{\cos^4\alpha} = \frac{n^4}{\cos^4 u\alpha} - \frac{2}{3} \frac{n^2(n^2-1)}{\cos^2 n\alpha} \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Die in den Gleichungen (20), (22), (25), (26) und (29) enthaltenen doppelten Vorzeichen beziehen sich auf die Fälle, in denen $\mu = 4p+1$ oder $= 4p-1$ ist.

8) Zum Schlusse wollen wir hier noch die Werte ableiten, die wir für die Summen des Producte von je zwei aufeinander folgenden Werten $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ aufstellen.

Wir haben:

$$\sin\alpha_p \, . \, \sin\alpha_{p+1} = \sin\alpha_p \left(\sin\alpha_p \, . \, \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} \, . \, \cos\alpha_p\right)$$

also:

$$\Sigma\sin\alpha_p \, . \, \sin\alpha_{p+1} = \Sigma\sin^2\alpha_p \, . \, \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} \, . \, \Sigma\sin\alpha_p \, . \, \cos\alpha_p$$

Nun finden wir aber aus unserem allgemeinen Satze, dass

$$\Sigma\sin\alpha_p\cos\alpha_p = 0$$

und

$$\Sigma\sin^2\alpha_p = \frac{n}{2}$$

ist, und erhalten also:

$$P = \Sigma\sin\alpha_p \, . \, \sin\alpha_{p+1} = \frac{n}{2} \, . \, \cos\frac{2\pi}{n}$$

und ebenso

$$Q = \Sigma\cos\alpha_p \, . \, \cos\alpha_{p+1} = \frac{n}{2} \, . \, \cos\frac{2\pi}{n} \qquad (30)$$

III. Goniometrische Relationen für gerade n.

1) Wir haben bisher immer n als ungerade vorausgesetzt. Ist n gerade, so gelten eine Reihe der entwickelten Relationen entweder überhaupt nicht oder nicht mehr bis zu denselben Grenzen $n-1$ resp. $2n-2$, jenachdem die Functionen von ungerader oder gerader

Ordnung sind. Die Werte $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ resp. ihre Verbindungen treten zudem jetzt paarweise auf, und es sind für Functionen ungerader Ordnung diese Paare von entgegengesetzten Vorzeichen, und wir werden aber, wie bereits oben in einem besondern Falle bemerkt wurde, die Gleichungen als gültig ansehen dürfen. Ist der Grad der Function gerade, so werden wir um Constanten zu erhalten diesen nicht grösser als $n-2$ annehmen dürfen, da die Zahl der Symmetrien in diesem Falle nur gleich n ist. Es bietet auch keine Schwierigkeit in jedem besondern Falle diese Fragen zu erledigen. Anders ist es aber, wenn der Grad der Function der Werte $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ gleich n ist.

2) Wir fanden z. B. für $n=7$:

$$\Pi\sin\alpha = \sin\alpha_1 \,.\, \sin\alpha_2 \,.\, \sin\alpha_3 \,.\,.\,.\, \sin\alpha_7 = -\frac{\sin 7\alpha}{2^6}$$

Ist $n=14$, so zerlegen wir die 14 Werte $\sin\alpha$ in zwei Gruppen und erhalten

$$\Pi\sin\alpha' = \sin\alpha_1 \,.\, \sin\alpha_3 \,.\, \sin\alpha_5 \,.\,.\,.\, \sin\alpha_{13} = -\frac{\sin 7\alpha_1}{2^6}$$

und

$$\Pi\sin\alpha'' = \sin\alpha_2 \,.\, \sin\alpha_4 \,.\, \sin\alpha_6 \,.\,.\,.\, \sin\alpha_{14} = -\frac{\sin 7\alpha_2}{2^6} + \frac{\sin 7\alpha_1}{2^6}$$

Hieraus folgt aber:

$$\Pi\sin\alpha = -\frac{\sin^2 7\alpha}{2^{12}}$$

und dann:

$$\Pi\cos\alpha = -\frac{\cos^2 7\alpha}{2^{12}}$$

und es ist leicht die Frage für den Fall, dass n nur durch den geraden Factor 2 teilbar ist, also die Form $4p+2$ hat, das Resultat zu geben.

Ist n durch 4 teilbar, so gehen wir von der Zahl 4 selbst aus. Es ist dann leicht zu zeigen, dass

$$\Pi\sin\alpha = \sin\alpha_1 \,.\, \sin\alpha_2 \,.\, \sin\alpha_3 \,.\, \sin\alpha_4 = \tfrac{1}{4} \,.\, \sin^2 2\alpha$$

Hieraus erhalten wir durch Zerlegung in drei Teile z. B. für $n=12$ die Relation:

$$\Pi\sin\alpha = \frac{1}{64} \,.\, \sin^2 2\alpha_1 \,.\, \sin^2 2\alpha_2 \cdot \sin^2 2\alpha_3 = \frac{1}{2^{10}} \,.\, \sin^2 6\alpha$$

Ist n durch 8 teilbar, so führt eine analoge Rechnung zum Ziel, es ist dann für $n = 8$ selbst:

$$\Pi \sin\alpha = \frac{1}{2^6} \cdot \sin^2 3\alpha \quad \text{u. s. f.}$$

Analoge Betrachtungen führen bei den andern Gleichungen auf entsprechende Relationen.

Anwendungen.

IV. Aufstellung weiterer goniometrischer Gleichungen.

1) Die bisher gegebenen Entwicklungen gestatten uns ausser den bereits gegebenen noch eine Menge anderer goniometrischer Relationen anzugeben. Um solche zu erhalten, können wir wie folgt verfahren. Wie wir sahen, stellt eine cyklisch symmetrische Function der Geraden L von gerader Ordnung $< 2n$ immer eine mit einer Constanten multiplicirte Potenz von x^2+y^2 dar und verschwindet für ungerade Ordnungen $< n$ identisch. Um diese Constante zu erhalten, genügt es jeweils einen einzigen Coefficienten in der Function $F(L)$ zu bestimmen. Ist dieser bekannt, so resultiren dann von selbst für die andern Coefficienten solche goniometrische Gleichungen. So erhalten wir z. B. für die Summe der Combinationen der L die identischen Gleichungen:

$$C^2(L) = -\frac{1}{2^2} \cdot n(x^2 + y^2)$$

$$C^3(L) = +0$$

$$C^4(L) = +\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot n(n-3)(x^2+y^2)^2$$

$$C^5(L) = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Ebenso erhalten wir für die Summen der Combinationen aus den Werten L^2 die Relationen

$$C^2(L_2^2) \equiv \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot n(2n-3)(x^2+y^2)^2$$

$$C^3(L^2) \equiv \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot n(2n-4)(2n-5)(x^2+y^2)^3$$

$$C^2(L^2) = \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^7} \cdot n(2n-5)(2n-6)(2n-7)(x^2+y^2)^4$$

u. s. f.

2) Weit wichtiger als die hier angedeuteten Relationen sind aber diejenigen, die wir erhalten, wenn wir für α in den bereits gefundenen besondere Werte einsetzen. So gehen die Gleichungen (5), (9) und (10) für $\alpha_1 = 0$ ohne Schwierigkeiten in die folgenden über:

$$\left.\begin{array}{l}
\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} - \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots \pm \cos\frac{n-1}{2n}\pi = \frac{1}{2} \\
\text{(Euler)} \\
\cos^3\frac{\pi}{n} - \cos^3\frac{2\pi}{n} + \cos^3\frac{3\pi}{n} - \cos^3\frac{4\pi}{n} + \ldots \pm \cos^3\frac{n-1}{2n}\pi = \frac{1}{2} \\
\cos^5\frac{\pi}{n} - \mathrm{cns}^5\frac{2\pi}{n} + \cos^5\frac{3\pi}{n} - \cos^5\frac{4\pi}{n} + \ldots \pm \cos^5\frac{n-1}{2n}\pi = \frac{1}{2} \\
\text{u. s. w.}
\end{array}\right\} \quad (31)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\frac{2\pi}{n} + \sin^2\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin^2\frac{n-1}{2n}\pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \\
\sin^4\frac{\pi}{n} + \sin^4\frac{2\pi}{n} + \sin^4\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin^4\frac{1-1}{2n}\pi = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n}{2} \\
\sin^6\frac{\pi}{n} + \sin^6\frac{2\pi}{n} + \sin^6\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin^6\frac{n-1}{2n}\pi \\
\qquad = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n}{2} \\
\text{u. s. f.}
\end{array}\right\} \quad (32)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\cos^2\frac{\pi}{n} + \cos^2\frac{2\pi}{n} + \cos^2\frac{2\pi}{n} + \ldots + \cos^2\frac{n-1}{2n}\pi \\
\qquad = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \\
\cos^4\frac{\pi}{n} + \cos^4\frac{2\pi}{n} + \cos^4\frac{3\pi}{n} + \ldots + \cos^4\frac{n-1}{2n}\pi \\
\qquad = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n}{2} - \frac{1}{2}
\end{array}\right\} \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos^6\frac{\pi}{6}+\cos^6\frac{2\pi}{n}+\cos^6\frac{3\pi}{n}+\ldots+\cos^6\frac{n-1}{n}\pi \\ =\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

etc., wobei die Exponenten nicht n resp. $2n$ erreichen dürfen.

3) Ist ebenso $\alpha=\frac{\pi}{3}$, so finden wir:

$$\sin\frac{\pi}{3n}+\sin\frac{2\pi}{3n}+\sin\frac{4\pi}{3n}-\sin\frac{5\pi}{3n}+\sin\frac{7\pi}{3n}+\ldots \pm\sin\frac{3n-1}{6a}\pi=0$$

$$\sin^2\frac{\pi}{3n}+\sin^2\frac{2\pi}{3n}+\sin^2\frac{4\pi}{3n}+\sin^2\frac{5\pi}{3n}+\sin^2\frac{7\pi}{3n}+\ldots +\sin^2\frac{3n-1}{6n}\pi=\frac{1}{2}n$$

$$\sin^5\frac{\pi}{3n}+\sin^3\frac{2\pi}{3n}-\sin^3\frac{4\pi}{3n}-\sin^3\frac{5\pi}{3n}+\sin^3\frac{7\pi}{n}+\ldots \pm\sin^3\frac{3n-1}{6n}\pi=0$$

$$\sin^4\frac{\pi}{3n}+\sin^4\frac{2\pi}{3n}+\sin^4\frac{4\pi}{3n}+\sin^4\frac{5\pi}{3n}+\sin^4\frac{7\pi}{n}+\ldots +\sin^4\frac{3n-1}{6n}\pi=\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot n$$

. . . .

$$\cos\frac{\pi}{3n}-\cos\frac{2\pi}{3n}-\cos\frac{4\pi}{3n}+\cos\frac{5\pi}{3n}+\cos\frac{7\pi}{3n}-\ldots \pm\cos\frac{3n-1}{6n}\pi=0$$

$$\cos^2\frac{\pi}{3n}+\cos^2\frac{1\pi}{3n}+\cos^2\frac{4\pi}{3n}+\cos^2\frac{5\pi}{3n}+\cos^3\frac{7\pi}{3n}+\ldots +\cos\frac{3n-1}{6n}\pi=\frac{1}{2}n$$

$$\cos^3\frac{\pi}{2n}-\cos^3\frac{2\pi}{3n}-\cos^3\frac{4\pi}{3n}+\cos^3\frac{5\pi}{3n}+\cos^3\frac{7\pi}{3n}-\ldots \pm\cos^3\frac{3n-1}{6n}\pi=0\quad(34)$$

$$\cos^4\frac{\pi}{3n}+\cos^2\frac{2\pi}{3n}+\cos^4\frac{4\pi}{3n}+\cos^4\frac{5\pi}{3n}+\cos^4\frac{7\pi}{3n}+\cdots+\cos^4\frac{3n-1}{6n}\pi=\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,n \qquad (34)$$

u. s. f. Die in den Zählern auftretenden Zahlen sind alle von der Form $3p\pm1$.

Gleicher Art erhalten wir:

$\alpha=\frac{\pi}{4}$:

$$\sin\frac{\pi}{4n}+\sin\frac{5\pi}{4n}-\sin\frac{5\pi}{4n}-\sin\frac{7\pi}{4n}+\sin\frac{9\pi}{4n}+\cdots\pm\sin\frac{2n-1}{4n}\pi=0$$

$$\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\frac{3\pi}{4n}-\cos\frac{5\pi}{4n}+\cos\frac{7\pi}{4n}+\cos\frac{9\pi}{4n}-\cdots\pm\cos\frac{2n-1}{4n}\pi=0$$

$\alpha=\frac{\pi}{5}$:

$$\sin\frac{\pi}{5n}+\sin\frac{4\pi}{5n}-\sin\frac{6\pi}{5n}-\sin\frac{9\pi}{5n}+\sin\frac{11\pi}{5n}+\cdots\pm\sin\frac{5n-3}{10n}\pi=0$$

$$\cos\frac{\pi}{5n}-\cos\frac{4\pi}{5n}-\cos\frac{6\pi}{5n}+\cos\frac{9\pi}{5n}+\cos\frac{11\pi}{5n}-\cdots\pm\cos\frac{5n-3}{10n}\pi=0$$

$\alpha=\frac{2\pi}{5}$:

$$\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{7\pi}{5}-\sin\frac{8\pi}{5}+\sin\frac{12\pi}{5}+\cdots\pm\sin\frac{5n-1}{10n}\pi=0$$

$$\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{7\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+\cos\frac{12\pi}{5}-\cdots\pm\cos\frac{5n-1}{10n}\pi=0$$

(35)

u. s. f. Wir haben uns dabei auf die ersten Potenzen der Werte beschränkt; die auftretenden Zähler haben die Form $4p \pm 1$, $5p \pm 1$ und $5p \pm 2$.

Ist n gerade so erhalten wie ganz analoge Gleichungen, so finden wir z. B.

$$\sin^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{3\pi}{16} + \sin^2\frac{5\pi}{16} - \mathrm{su}^2\frac{7\pi}{16} = 2$$

$$\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{b\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$$

3) Ganz gleicher Art lassen sich aus den Summenreihen für die Potenzen der Werte $\frac{1}{\sin\alpha}$, $\frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{tang}\alpha$ und $\cos\alpha$, solche Gleichungen ableiten. Wir finden so, wenn wir uns auch hier auf den Wert $\alpha = \frac{\pi}{3}$ beschränken:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{3n}} - \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{5n}} - \frac{1}{\sin\frac{5\pi}{3n}} + \cdots \pm \frac{1}{\sin\frac{3n-1}{6n}\pi} \\
&\qquad\qquad = \frac{n}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2n}{\sqrt{3}} \\
&\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^2\frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{3n}} + \cdots \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\sin^2\frac{3n-1}{6n}} = \frac{n^2}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = \frac{4n^2}{3} \\
&\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^3\frac{2\pi}{3n}} - \frac{1}{\sin^3\frac{4\pi}{3n}} - \frac{1}{\sin^3\frac{5\pi}{3n}} + \cdots \\
&\qquad\qquad \pm \frac{1}{\sin^3\frac{3n-1}{6n}} = \frac{5n^3+3n}{3\sqrt{3}} \\
&\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^4\frac{2\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^4\frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^4\frac{5\pi}{3n}} + \cdots \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\sin^4\frac{3n-1}{5n}\pi} = \frac{8n^4+8n^2}{9} \\
&\qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right| \qquad (36)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3n}} - \frac{1}{\cos\frac{2\pi}{3n}} - \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{3n}} + \ldots \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\cos\frac{2n-1}{6n}\pi} = 2n \\
&\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos^2\frac{2\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos^2\frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos^2\frac{5\pi}{3n}} + \ldots \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\cos^2\frac{3n-1}{6n}\pi} = 4n^2 \\
&\frac{1}{\cos^3\frac{\pi}{3n}} - \frac{1}{\cos^3\frac{2\pi}{3n}} - \frac{1}{\cos^3\frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos^3\frac{5\pi}{3n}} + \ldots \\
&\qquad\qquad \pm \frac{1}{\cos^3\frac{3n-1}{6n}\pi} = 7n^3 + n
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

u. s. f.

$$\left.\begin{aligned}
&\tan\frac{\pi}{3n} - \tan\frac{2\pi}{3n} + \tan\frac{4\pi}{3n} - \tan\frac{5\pi}{3n} + \ldots \\
&\qquad\qquad \pm \tan\frac{3n-1}{6n}\pi = n\sqrt{3} \\
&\tan^2\frac{\pi}{3n} + \tan^2\frac{2\pi}{3n} + \tan^2\frac{4\pi}{3n} + \tan^2\frac{5\pi}{3n} + \ldots \\
&\qquad\qquad + \tan^2\frac{3n-1}{6n}\pi = 4n^2 - n \\
&\tan^3\frac{\pi}{3n} - \tan^3\frac{3\pi}{3n} + \tan^3\frac{4\pi}{3n} - \tan^3\frac{5\pi}{3n} + \ldots \\
&\qquad\qquad \pm \tan^3\frac{3n-1}{6n}\pi = (4n^3 - n)\sqrt{3} \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cot\frac{\pi}{3n} - \cot\frac{2\pi}{3n} + \cot\frac{4\pi}{3n} - \cot\frac{5\pi}{3n} + \ldots \\
&\qquad\qquad \pm \cot\frac{3n-1}{6n}\pi = \frac{n}{\sqrt{3}}
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cot^2\frac{\pi}{3n}+\cot^2\frac{2\pi}{3n}+\cos^2\frac{4\pi}{3n}+\cot^2\frac{5\pi}{3n}+\ldots\\
&\qquad\qquad+\cot^2\frac{3u-1}{6n}\pi=\frac{4n^2}{5}-n\\
&\cot^3\frac{\pi}{3n}-\cot^3\frac{2\pi}{3n}+\cot^3\frac{4\pi}{3n}-\cot^3\frac{5\pi}{3n}+\ldots\\
&\qquad\qquad\pm\cot^3\frac{3u-1}{6n}\pi=\Big(\quad-n\Big)\sqrt{3}\\
&\qquad\text{u. s. f.}
\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

Eine Schwierigkeit bei Aufstellung dieser Relationen tritt nur dann ein, wenn je eines der Glieder rechts und links die Form ∞ annimmt. Dies ist z. B. der Fall für $\Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha}$, wenn $\alpha_1=1$ ist. Wir erhalten dann aber

$$\Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha_1}=\frac{n^2}{\sin^2 n\alpha_1}-\frac{1}{\sin^2\alpha_1{}^2}$$

Ersetzen wir hier α und $n\alpha$ durch die Werte $\alpha-\frac{\nu^3}{3!}$ und $n\alpha-\frac{n^3\alpha^3}{3!}$, so erhalten wir ohne Schwierigkeit

$$\Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha_1}=\frac{n^2-1}{3}$$

Da in $\Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha}$ mit Ausnahme der ausgeschiedenen Glieder aber alle andern paarweise gleich sind, so folgt daraus wieder:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{n}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}=\frac{n^2-1}{6}$$

(Euler) (40)

Ganz ebenso finden wir noch z. B.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^4\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^4\frac{3\pi}{n}}+\ldots+\frac{1}{\sin^4\frac{n-1}{2n}\pi}\\
&\qquad\qquad=\frac{n^4+10n^2-11}{90}
\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{3\pi}{n}} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{n-1}{2n}\pi} \\
&\qquad = \frac{n^2 - 3n + 2}{6} \\
&\frac{1}{\operatorname{tang}^4 \frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\operatorname{tang}^4 \frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\operatorname{tang}^4 \frac{3\pi}{n}} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{tang}^4 \frac{n-1}{2n}\pi} \\
&\qquad = \frac{n^4 - 20n^2 + 45n - 26}{90}
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Die Bestimmung der Werte, die zu den Exponenten, 6, 8, 10 u. s. w. gehören führt auf mehr umständliche als schwierige Rechnungen.

Ist n gerade, so erhalten wir ganz ebenso:

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{n}} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 \frac{n-1}{2n}} = \frac{n^2-1}{6}$$

(Euler)

4) Wie wir weiterhin sehen ist:

$$\Pi \sin\alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}} \quad \text{und} \quad \Pi \cos\alpha = \frac{\cos n\nu}{2^{n-1}}$$

Geben wir auch hier α verschiedene Werte, so resultiren entsprechende Werte. Ist $\alpha = 0$, so wird, da $\frac{\sin n\alpha_1}{\sin\alpha_1} = n$ ist:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{n} \cdots \sin^2 \frac{n-1}{2n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}} \\
&\qquad\qquad \text{(Euler)} \\
&\cos^2 \frac{\pi}{n} \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{n} \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{n} \cdots \cos^2 \frac{n-1}{2n}\pi = \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Ist $\alpha = \frac{\pi}{3}$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \cdot \sin\frac{4\pi}{3} \cdot \sin\frac{5\pi}{3} \cdot \sin\frac{7\pi}{3} + \cdots \\
&\qquad \cdots \sin\frac{3n-1}{6n}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2^n}
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{3}\,.\,\cos^0\frac{2\pi}{3}\,.\,\cos\frac{4\pi}{3}\,.\,\cos\frac{5\pi}{3}\,.\,\cos\frac{7\pi}{3}+\ldots\\ \qquad\ldots\cos\frac{3n-1}{6n}\pi=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,\frac{1}{2^n}\\ \qquad\text{u. s. f.}\end{array}\right\}\quad(43)$$

V. Summirung reciproker Potenzreihen.

Durch die Gleichungen (27) und (28) ist es uns möglich gemacht, eine Menge von Summenformeln für Reihen aufzustellen, deren Glieder reciproke Potenzen ganzer Zahlen sind. Gehen wir etwa von der Reihe

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}-\frac{4}{\sin\frac{4\pi}{u}}-\frac{1}{\sin\frac{5\pi}{n}}++\frac{1}{\sin\frac{7\pi}{n}}+\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{1}{\sin\frac{3n-1}{6n}}=\frac{2n}{\sqrt{3}}$$

aus, so erhalten wir aus dieser

$$\frac{\frac{\pi}{3n}}{\sin\frac{\pi}{3n}}+\frac{\frac{2\pi}{3n}}{\sin\frac{2\pi}{3n}}-\frac{\frac{\pi}{3n}}{\sin\frac{4\pi}{3n}}-\ldots\pm\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{3n-1}{6n}\pi}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Lassen wir jetzt n in's Unendliche wachsen, so dürfen wir an Stelle der Sinusse die Winkel setzen und erhalten:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\ldots=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ \text{(Euler)}$$

und ebenso:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots=\frac{4\pi^2}{27}\ \text{(Euler)}$$

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{10^3}-\ldots=\frac{5\pi^3}{87\sqrt{3}}\quad(44)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{7}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\cdots=\frac{8\pi^4}{729} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(Euler)} \\ \frac{1}{1^5}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{4^5}-\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{8^3}-\frac{1}{10^5}-\cdots=\frac{17\pi^4}{2906\sqrt{3}} \\ \qquad\qquad\qquad\text{etc.} \end{array}\right\} \quad (44)$$

Ganz ebenso können wir von den Reihen für $\Sigma \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha^p}$ ausgehen und erhalten dann für die ungeraden Exponenten die weiteren Reihen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots=\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \text{ (Euler)} \\ \frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{8^3}+\frac{1}{19^3}-\cdots=\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(Euler)} \\ \qquad\qquad\qquad\text{u. s. f.} \end{array}\right\} \quad (45)$$

Weiter erhalten wir z. B. noch für $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4} \text{ (Leibnitz)} \\ 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \text{ (Euler)} \\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{3} \text{ (Euler)} \\ \frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots=\frac{\pi^3}{32} \text{ (Euler)} \\ \frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\cdots= \\ \frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96} \text{ (Euler)} \\ \qquad\qquad\qquad\text{etc.} \end{array}\right\} \quad (46)$$

Desgleichen erhalten wir solche Reihen, wenn wir für α die Werte $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{\pi}{8}$ etc. setzen. Dieses Verfahren versagt

aber für den Wert $\alpha = 0$. In diesem Falle müssen wir die bereits oben gefundenen Grenzwerte benutzen oder aber können wir die sich ergebenden Reihen von der Form

$$\frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \cdots$$

etwa aus den Reihen

$$\frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \cdots$$

bestimmen. So folgt z. B. für

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

aus der Reihe:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{4\pi^2}{27}$$

$$\frac{4}{27}\pi^2 + \frac{1}{9}S = S, \quad S = \frac{\pi^2}{6}$$

VI. Reihen in denen Binomialcoefficienten auftreten.

1) Wir sind bereits oben auf die merkwürdige Relation gestossen:

$$\frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{3}} + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + \cdots + \frac{\binom{p}{p}^2}{\binom{2p}{2p}} = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\,.\,.\, 2p}{1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, (2p-1)}$$

Ausser dieser lassen sich aber noch eine Menge anderer solcher Beziehungen zwischon Binomialcoefficienten durch die oben gegebenen goniometrischen Formeln ableiten. Um die obige Relation zu erhalten, gingen wir von der Gleichung

$$\Sigma(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^p = n$$

aus. Gehen wir ebenso von der Gleichung

$$\Sigma(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^p \,.\, \sin^{2q}\alpha = \Sigma\sin^{2q}\alpha = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\,.\,.\, 2q-1}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\,.\,.\, 1g} \,.\, n$$

aus, so finden wir, da wir n jedenfalls grösser als $2p + 2q$ wählen können, aus der entwickelten Gleichung

$$\Sigma \sin^{2p+2q} + \binom{p}{1} \Sigma \sin^{2p+2q-2} . \cos^2\alpha + \binom{p}{2} \Sigma \sin^{6p+2q-4}\alpha . \cos\alpha^4 + \dots$$
$$= \frac{1 . 3 . 5 . \; . \; . 2q-1}{2 . 4 . 6 . \; . \; . 2p} . u$$

durch Einsetzen der aus den Gl. (16) und den folgenden sich ergebenden Werten:

$$\Sigma \sin^{2p+2q} = \frac{\binom{p+q}{0}}{\binom{2p+2q}{0}} . \varphi(p+q)$$

$$\Sigma \sin^{2p+q-2}\alpha . \cos^2\alpha = \frac{\binom{p+q}{1}}{\binom{2p+2d}{2}} . \varphi(p+q)$$

$$\Sigma \sin^{2p+5q-4}\alpha . \cos^4\alpha = \frac{\binom{p+d}{2}}{\binom{2p+2q}{4}} . \varphi(p+q) \quad \text{etc.}$$

$$\varphi(p+q) = \frac{1 . 3 . 5 . \; . \; . (2p+2q-1)}{2 . 4 . 6 . \; . \; . (2p+2q)} :$$

$$\frac{\binom{p}{0}\binom{p+q}{0}}{\binom{2p+2q}{0}} + \frac{\binom{p}{1}\binom{p+q}{1}}{\binom{2p+2q}{2}} + \frac{\binom{p}{2}\binom{p+q}{2}}{\binom{2p+2q}{4}} + \dots$$
$$= \frac{(2q+2)(2q+4) . \; . \; . (2q+2p)}{(2q+1)(2q+3) . \; . \; . (2q+2p-1)} \tag{47}$$

Wird insbesondere $p = q$ genommen, so ist

$$\frac{\binom{p}{0}\binom{2p}{0}}{\binom{4p}{0}} + \frac{\binom{p}{1}\binom{2p}{1}}{\binom{4p}{2}} + \frac{\binom{p}{2}\binom{2p}{2}}{\binom{4p}{4}} + \dots$$
$$= \frac{(2p+2)(2p+4) . \; . \; . (4p)}{(2p+1)(2p+3) . \; . \; . (4p-1)} \tag{48}$$

2) Wählen wir dagegen die Gleichung

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

so haben wir

$$\Sigma \cos^p 2\alpha = \Sigma(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^p$$

oder

$$\Sigma\cos^p 2\alpha = \Sigma\cos^{2p}\alpha - \binom{p}{1}\Sigma\cos^{2p-2}\alpha \cdot \sin^2\alpha + \binom{p}{2}\Sigma\cos^{2p-4}\alpha \cdot \sin^4\alpha - \dots$$

Ist hier p ungerade, so ergiebt sich eine Reihe, deren Glieder sich paarweise aufheben, ist dagegen p gerade, so finden wir, wenn wir anstatt p den Wert $2q$ setzen:

$$\frac{\binom{2q}{0}^2}{\binom{4q}{6}} - \frac{\binom{2q}{1}^2}{\binom{4q}{2}} + \frac{\binom{2q}{2}^2}{\binom{4q}{4}} + \dots$$
$$= \frac{\varphi(2q)}{\varphi(4q)} = \frac{(2q+2)(2q+4)\dots(4q)}{(2q+1)(2q+3)\dots(4q-1)} \tag{49}$$

3) Es ist ferner

$$2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin^4\nu$$

also:

$$\Sigma\sin^p\alpha = 4^p\,\Sigma\sin^p\alpha\cos^p\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^p)$$

oder:

$$\frac{1}{2^{2p}} \cdot \Sigma\sin^p 4\alpha = \Sigma\sin\alpha \cdot \cos^{3p}\alpha - \binom{p}{1} \cdot \Sigma\sin^{p+2}\alpha \cdot \cos\alpha^{3p-2}$$
$$+ \binom{\eta}{2} \cdot \Sigma\sin^4\alpha \cdot \cos^{3p-2}\alpha - \dots$$

und hieraus für $p = 2q$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\binom{4q}{4}\binom{2q}{0}}{\binom{8q}{2q}} - \frac{\binom{4q}{q+1}\binom{2q}{1}}{\binom{2q+2}{8q}} + \frac{\binom{4q}{q+2}\binom{2q}{2}}{\binom{8q}{2q+4}} + \dots \\ &= \frac{\varphi(8q)}{\varphi(2q)} \cdot \frac{1}{1^{4q}} = \frac{(2q+2)(2q+4)(2q+6)\dots(8q)}{(2q+1)(2q+3)(2d+5)\dots(8q-1)}\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

4) Aus

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha$$

folgt desgleichen:

$$\Sigma(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)^p = \Sigma\cos^p 2\alpha$$

$$\Sigma\cos^{4p}\alpha - \binom{p}{1}\Sigma\cos^{4p4}\alpha \cdot \sin^4\alpha + \binom{p}{2}\Sigma\cos^{4p-8} \cdot \sin^8\alpha - \dots$$
$$= \Sigma\cos^p 2\alpha$$

oder für $p = 2q$:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\binom{4q}{0}\binom{2q}{0}}{\binom{8q}{6}}-\frac{\binom{4q}{2}\binom{2q}{1}}{\binom{8q}{4}}+\frac{\binom{4q}{4}\binom{2q}{2}}{\binom{8q}{8}}-\cdots\\&\qquad=\frac{(4q+2)(4q+4)\ldots(8q)}{(4q+1)(4q+3)\ldots(8q-1)}\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

5) Da

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$$

folgt weiter aus

$$\Sigma\cos^{2p}\alpha = \Sigma(1-\sin^2\alpha)^p$$

$$\Sigma\cos^{2p}\alpha = n-\binom{p}{1}\Sigma\sin^2\alpha+\binom{p}{2}\Sigma\sin^4\alpha-\binom{p}{3}\Sigma\sin^6\alpha+\cdots$$

oder:

$$1-\frac{1}{2}\cdot\binom{p}{1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\binom{p}{2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\binom{p}{3}+\cdots\pm\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2p-1}{2\cdot4\cdot6\ldots2p}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2p-1}{2\cdot4\cdot6\ldots2p}$$

Ist p gerade $=2q$, so erhalten wir daraus:

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\cdot\binom{2q}{1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\binom{2q}{2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\binom{2q}{3}+\cdots\\&\qquad-\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2q-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots(4q-2)}\cdot\binom{2q}{2q-1}=0\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

Ist dagegen $p=2q+1$, so wird

$$\left.\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}\cdot\binom{2q+1}{1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\binom{2q+1}{2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\\&\cdot\binom{2q+1}{3}+\cdots+\frac{2\cdot4\cdot6\ldots(4q)}{1\cdot3\cdot5\ldots(4q-1)}\cdot\binom{2q+1}{2q}\\&\qquad=2\,\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(4q+1)}{2\cdot4\cdot6\ldots4q+2}\end{aligned}\right\}\quad(53)$$

6) Aus

$$1+\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

folgt analoger Weise

$$\Sigma(1+\cos2\alpha)^p = 2^p\,\Sigma\cos^{2p}\alpha$$

$$\left.\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}\binom{p}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\binom{p}{4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\binom{p}{4}+\cdots\\&\qquad=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2p-1)}{p!}\end{aligned}\right\}\quad(54)$$

7) Desgleichen giebt $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\Sigma \cos^p 2\alpha = \Sigma (1 - 2\sin^2\alpha)^p$$

oder wenn wir das eine mal $p = 2q$, das andre mal $p = 2q+1$ setzen:

$$\left.\begin{aligned} &1 - \frac{1}{1!}\binom{2q}{1} + \frac{1.3}{2!}\binom{2q}{2} - \frac{1.3.5}{3!}\binom{2q}{3} + \dots \\ &\qquad = \frac{1.3.5\dots(4q-1)}{2.4.6\dots(4q)} \\ &1 - \frac{1}{1!}\binom{2q+1}{1} + \frac{1.3}{2!}\binom{2q+1}{2} - \frac{1.3.5}{3!}\binom{2q+1}{3} \\ &\qquad + \dots = 0 \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

8) Multipliciren wir $\cos 2\alpha$ mit $(1-\cos 2\alpha)^p$ und ebenso $(-2\sin^2\alpha$ mit $2^p \sin^{2p}\alpha$, so erhalten wir

$$\cos 2\alpha (1-\cos 2\alpha)^p = 2^p \sin^{2p}\alpha (1 - 2\sin^2\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\cdot\binom{p}{1} + \frac{1.3}{2.4}\binom{p}{3} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\binom{p}{5} + \dots \\ &= 2^p\left\{\frac{1.3.5\dots(2p+1)}{2.4.6\dots(2p)}\,.\,2 - \frac{1.3.5\dots 2p-1}{2.4.6\dots 2p}\right\} \\ &\qquad = \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{p!}\cdot\frac{p}{p+1} \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

9) Weitere solche Relationen ergeben sich noch aus

$$a + b\cos^2\alpha = a\sin^2\alpha + (a+b)\cos^2\alpha$$

So ist z. B.

$$1 + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$$

also:

$$\Sigma (1+\cos^2\alpha)^p = \Sigma(\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)^p$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2}\cdot\binom{p}{1} + \frac{1.3}{2.4}\binom{p}{2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\binom{p}{3} + \dots \\ &\left\{\frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}}\,.\,2 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}}\,.\,2^2 + \frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}}\,.\,2^3 + \dots\right\} \\ &\qquad .\ \frac{1.3.5\dots 2p-1}{2.4.6\dots 2p} \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Ebenso aus

$$1+2\cos^2\alpha = \sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}\cdot 2^1\cdot\binom{p}{1}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot 2^2\cdot\binom{p}{2}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot 2^3\cdot\binom{p}{3} \\ \qquad +\ldots \\ -\left\{\frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}}\cdot 3^0+\frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}}\cdot 3^1+\frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}}\cdot 3^2+\frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}}\cdot 3^3+\ldots\right\} \\ \qquad \cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2p-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,(2p)} \end{array}\right\} \quad (58)$$

10) Eine weitere Formel liefert uns auch

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}(2-\sin^2 2\alpha) = \tfrac{1}{2}(\sin^2 2\alpha+2\cos^2 2\alpha)$$

Potenziren wir mit p, so erhalten wir hieraus:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{\binom{2p}{0}\binom{p}{0}}{\binom{4p}{1}}+\frac{\binom{2p}{2}\binom{p}{1}}{\binom{4p}{4}}+\frac{\binom{2p}{4}\binom{p}{2}}{\binom{4p}{8}}+\ldots\right\} \\ \qquad \cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(4p-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,(4p)} \\ = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\binom{p}{1}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\binom{p}{2}-\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{2^3} \\ \qquad \cdot\binom{p}{3}+\ldots \\ -\left\{\frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}}+2\,\frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}}+2^2\,\frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}}+2^3\,\frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}}+\ldots\right\} \\ \qquad \cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2p-1)}{p!} \end{array}\right\} \quad (59)$$

$$= \left\{1+\frac{1}{2}\cdot\binom{p}{1}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\binom{p}{2}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\binom{p}{3}+\ldots\right\}\cdot\frac{1}{2^p} \quad \text{(Gl. 57)}$$

11) Zum Schlusse wollen wir noch eine Formel ableiten, die zwar keine Binomialcoefficienten enthält, aber sonst von Interesse ist.

Wie wir sahen, gelten die Gleichungen:

$$\Pi(1-\cos 2\alpha) = 2^n \Pi \sin^2\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{2^{n-2}}$$

$$\Pi(1+\cos 2\alpha) = 2^n \Pi \cos^2\alpha = \frac{\cos^2 n\alpha}{2^{n-2}}$$

Hieraus folgt aber durch Addition:

$$\Pi(1-\cos 2\alpha) + \Pi(1+\cos 2\alpha) = \frac{1}{2^{n-2}}$$

oder:

$$1 + C_2 + C_4 + C_6 + \ldots + C_{n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} &1 - \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot n + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot n(n-3) - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{2^6}\cdot n(n-4)(n-5) \\ &+ \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^8}\, n(n-5)(n-6)(n-7) - \ldots \pm \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{2n-1}} \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

VII. Anwendungen auf die Ellipse.

1) Eine Ellipse möge durch die Gleichungen

$$x = a\cos\alpha, \quad y = b\sin a$$

gegeben sein. Geben wir hierin dem Winkel α nach und nach die Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots a_n$, wo

$$\alpha_p = \alpha_1 + \frac{2(p-1)}{n}\pi$$

ist, so erhalten wir auf der Ellipse die Ecken eines flächengrössten n Ecks, das ihr einbeschrieben ist. Bezeichnen wir weiter mit r_1, r_2, $r_3 \ldots r_n$ die Entfernungen eines Punktes P von den Ecken dieses n-Ecks $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$, so erhalten wir, wenn p und q die Coordinaten des Punktes P sind, die Gleichung

$$r^2 = (p - a\cos\alpha)^2 + (q - b\sin\alpha)^2$$

und hieraus:

$$= p^2 + q^2 + a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha - 2ap\cos\alpha - 2bq\sin\alpha$$

und

$$\Sigma r^2 = n(p^2+q^2) + \Sigma(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha - 2ap\cos\alpha - 2bq\sin\alpha)$$
$$= n(p^2+q^2) + \frac{a^2+b^2}{2} \cdot n \qquad (61)$$

Dies giebt uns aber den Satz:

„Ziehen wir nach den Ecken eines beliebigen flächengrössten „einer Ellipse einbeschriebenen n-Ecks $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ von einem „beliebigen Punkte P die Strahlen $PA_1, PA_2 \ldots PA_n$, so ist die „Summe der Quadrate dieser Strahlen

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PA_n^2$$

„constant, wenn das n-Eck sich ändert oder aber der Punkt P auf „einem Kreise um den Mittelpunkt der Ellipse sich bewegt. Diese „Summe wird zudem ein Minimum, wenn der Punkt P in den Mittel-„punkt der Ellipse zu liegen kommt und zwar ist sie dann immer

$$= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2) \text{ *)}$$

---

*) Ausserdem finden wir z. B. für flächengrösste der Ellipse einbeschriebene Dreiecke noch:

„Die Summe der reciproken Höhenquadrate ist constant, nämlich gleich

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

„und ebenso ist die Summe der reciproken Biquadrate der Höhen constant, „nämlich gleich

$$\frac{2}{27}\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)$$

Ebenso finden wir für die Summe der Quadrate der Ecktransversalen eines solchen Dreiecks nach den Seitenmitten die constante Summe

$$\frac{27}{8}(a^2+b^2)$$

und für die Summe der Biquadrate desgleichen

$$\frac{243}{128}(a^4+2a^2b^2+3b^4)$$

und hieraus, wenn wir diese Summe mit

$$\Sigma\frac{1}{h^2},\ \Sigma\frac{1}{h^4},\ \Sigma t^2 \text{ und } \Sigma t^4$$

bezeichnen. In jedem Dreieck ist

$$\left(\frac{\Sigma t^2}{\Sigma\frac{1}{h^2}}\right)^2 = \frac{\Sigma t^4}{\Sigma\frac{1}{h^4}}$$

Für $n = 4$ erhalten wir den bekannten Satz für die Quadratsumme conjugirter Halbmesser, für $n = 3$ gab die Erweiterung Jakob Steiner. Es ist weiterhin klar, dass wir ausser der Summe der Quadrate irgend welche cyklisch-symmetrische Functionen der Werte r^2, für gerade n bis zum Grade $\frac{n-2}{2}$ und für ungerade n bis zur Ordnung $n-1$ nehmen dürfen. Wir werden dann immer Constanten erhalten. Für einen beliebigen Punkt P werden aber die sich ergebenden Summen keine einfachen mehr und wir wollen uns deshalb darauf beschränken einzelne Fälle für den besondern Umstand, dass P Mittelpunkt der Ellipse ist, zu erörtern.

2) Bilden wir für den letztgenannten Fall die Summe der $2p$ten Potenzen der r, so erhalten wir

$$\Sigma PA^{2p} - \Sigma r^{2p} = \Sigma(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)^p$$
$$= a^{2p}\Sigma\cos^{2p} + \binom{p}{1} a^{2p-2}b^2 \Sigma\cos^{2p-2}\alpha\sin^2\alpha + \ldots$$

Setzen wir hierin für $\Sigma\cos^{2p}\alpha$ etc. die früher gefundenen Werte und für $\varphi(p)$ zudem den Wert aus Gl. (7) ein, so haben wir aber:

„Ziehen wir von dem Mittelpunkt einer Ellipse nach den Ecken „eines einbeschriebenen flächengrössten n-Ecks Strahlen, so ist die „Summe der $2p$ten Potenzen dieser Strahlen für $2p < o$ oder „$2p < 2u$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, constant, näm-„lich es ist diese Summe gleich:

$$\frac{a^{2p} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} a^{2p-2} \cdot b^2 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} a^{2p-0} \cdot b^4 + \ldots}{1 + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + \frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}} + \ldots}$$

3) Sei gleicherweise eine Ellipse gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und ziehen wir durch den Mittelpunkt dieser Ellipse Strahlen, welche mit der x-Achse die oft genannten Winkel α bilden, so erhalten wir, wenn wir $x = \varrho \cdot \cos\alpha$, $y = \varrho \cdot \sin\alpha$ setzten:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}$$

Hieraus erhalten wir ebenso:

$$\Sigma\frac{1}{\varrho^{2p}} = \Sigma\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\mu}{b^2}\right)^p$$

und wie oben:

„Ziehen wir desgleichen durch den Mittelpunkt einer Ellipse n „Strahlen, die den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile zerlegen, so ist „auch die Summe der 2pten reciproken Potenzen der n Halbmesser „constant, wenn p die obigen Bedingungen erfüllt, und zwar ist diese „Summe gleich:

$$\frac{1}{a^{2p}\,b^{2p}}\;\frac{a^{2p} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}}\, a^{2p-2} \,.\, b^2 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} \,.\, a^{2p-4}\, b^4 + \ldots}{1 + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + \ldots}$$

Ist $n = 4$, so resultirt daraus der bekannte Satz über die Summe der reciproken Quadrate zweier senkrechten Ellipsenhalbmesser.

Wir brauchen auch hier kaum zu erwähnen, dass wir uns hiebei nicht auf die genannten Potenzsummen zu beschränken brauchen.

4) Die zuletzt erwähnte Eigenschaft lässt sich auch auf die Hyperbel ausdehnen; sie gestattet aber noch eine Erweiterung', die sich auf Kegelschnitte überhaupt bezieht. Sei die Gleichung irgend eines Kegelschnitts gegeben durch

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$$

und legen wir durch den Coordinatenursprung eine Gerade, welche mit der x-Achse den Winkel α bildet, so erhalten wir für die Abschnitte ϱ_1 und ϱ_2, die auf dieser durch den Kegelschnitt bestimmt sind, die Gleichung:

$$(A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha)\,\varrho^2 + 2(C\cos\alpha + D\sin\alpha)\,\varrho + E = 0$$

und somit

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -2\,\frac{C\cos\alpha + D\sin\alpha}{E}$$

$$\frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} = \frac{A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha}{E}$$

Nun ist z. B.

$$\frac{1}{\varrho_1^3} + \frac{1}{\varrho_2^3} = \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)^3 - \frac{3}{\varrho_1\varrho_2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$$

Ebenso ist allgemein

$$\frac{1}{\varrho_1^p} + \frac{1}{\varrho_2^p} = \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho^2}\right)^p + \frac{a_1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)^{p-2}$$
$$+ \frac{a_2}{\varrho_1^2 \cdot \varrho_2^2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)^{p-4} + \ldots$$

wo a_1, a_2, . . . gewisse constante Grössen sind.

Berücksichtigen wir aber das Allgemeine über die cyklisch-symmetrischen Verbindungen der Werte $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ Gesagte und geben wir jetzt α die vielgenannten Werte und addiren, so folgt unmittelbar, dass für

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho_1^p} + \frac{1}{\varrho_2^p}\right)$$

entweder lauter solche cyklisch-symmetrische Functionen ungeraden oder aber lauter von geradem Grade auftreten.

Daraus erhalten aber z. B.:

„Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene eines „Kegelschnitts n Strahlen, welche den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile „zerlegen, und bestimmt der Kegelschnitt auf diesen Strahlen der „Reihe nach die Punkte A_1, A_2, A_3 . . . A_{nn}, so ist für $p > n$ und „p ungerade alle mal

$$\frac{1}{PA_1^p} - \frac{1}{PA_2^p} + \frac{1}{PA_3^p} - \frac{1}{PA_4^p} + \ldots = 0$$

und für p gerade

$$\frac{1}{PA_1^p} + \frac{1}{PA_2^p} + \frac{1}{PA_3^p} + \frac{1}{PA_4^p} + \ldots = \text{const.}\ ^{*})$$

---

*) Ausser diesen Sätzen lassen sich eine Reihe andere Beziehungen bei den Kegelschnitten ableiten; so z. B.:

VIII. Anwendungen auf den Kreis.

1) Ist einem Kreise ein reguläres Vieleck $A_1 A_2 \ldots A_n$ (Fig. 2) einbeschrieben und ziehen wir von einem beliebigen Punkte P nach den Ecken dieses Vielecks Sehnen, und ziehen wir ebenso von dem P auf dem Kreise diametral gegenüber liegenden Punkte P_1 solche Sehnen, so teilen diese letzteren den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile und bilden also mit einem festen durch P_1 gezogenen Strahl Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Ist $PP_1 = 2r$, so werden aber die Werte PA_1, PA_2, $PA_3, \ldots$ gleich $2r \sin \alpha_1$, $2r \sin \alpha_2$, $2r \sin \alpha_3$, und wir erhalten, wenn wir das reguläre Polygon sich auf dem Kreise bewegen lassen z. B. aus den goniometrischen Relationen:

„Ziehen wir von einem beliebigen Punkte P eines Kreises nach „den Ecken eines ihm einbeschriebenen n Ecks Strahlen PA_1, PA_2. „. . . , so ist die Summe der Potenzen dieser Strahlen mit ab- „wechs. Vorzeichen gleich null, wenn der Potenzexponent $< n$ un „gerade, und die Summe dieser Potenzen gleich einer Constanten, „wenn dieser Exponent gerade und kleiner als $2n$ ist. So ist z. B.

$$PA_1 - PA_2 + PA_5 - PA^4 + \ldots \pm PA_n = 0$$

$$PA_1^3 - PA_2^3 + PA_3^3 - PA_4^3 + \ldots + PA_n^3 = 0$$

$$PA_1^5 - PA_2^5 + PA_3^5 - PA_4^4 + \ldots + PA_n^5 = 0 \text{ u. s. w.}$$

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + \ldots + PA_n^2 = \tfrac{1}{2}n \cdot 4r^2 = 2nr^2$$

$$PA_1^4 + PA_2^4 + PA_3^4 + \ldots + PA_n^4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot n \cdot 16r^4 = 6nr^4$$

$$PA_1^6 + PA_2^6 + PA_3^6 + \ldots + PA_n^6 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot n \cdot 64r^6$$

$$= 20nr^6 \text{ u. s. f.}$$

2) Es dürfte nicht ohne Interesse sein von diesem Satze einige specielle Fälle anzuführen:

1. Fall. $n = 2$. „Satz des Pythagoras".

2. Fall. $n = 3$. „Zieht man von einem Punkte eines Kreises „nach den Ecken eines gleichseitigen ihm einbeschriebenen „Dreiecks Strahlen, so ist der mittlere gleich der Summe

---

„Ist einer Ellipse ein gleichseitiges Dreieck umschrieben, so ist die Summe „der Quadrate und die Summe der Biquadrate der Entfernungen des Ellipsenmit- „telpunkts von den Seiten der Dreiecke constant, nämlich gleich

$$\tfrac{3}{2}(a^2 + b^2) \text{ bzhw. gleich } \tfrac{3}{8}(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)$$

„beiden andern. (Bekannter el. Satz.) Die Summe der „Quadrate dieser Strahlen ist dagegen gleich $6r^2$ und die „Summe der Biquadrate gleich $18r^4$.

3. Fall $n = 4$. „Zieht man ebenso von einem Punkt des „Umfangs des einem Quadrat umschriebenen Kreises „nach den Ecken des Quadrats die vier Strahlen, so ist „die Summe der Quadrate, vierten und sechsten Potenzen „dieser Strahlen entsprechend gleich $8r^2$, $24r^4$, $80r^6$ „u. s. w."

3) Wählen wir den Punkt P insbesondere in der Mitte des Bogens über einer Seite des n-Ecks und ist n ungerade, so werden die Sehnen paarweise gleich, und eine wird gleich dem Durchmesser des Kreises, und wir haben dann:

$$PA_1 - PA_2 + PA_3 - \ldots \pm PA\frac{n-1}{2} = \pm \frac{2r}{2} = \pm r$$

$$PA_1^3 - PA_2^3 + PA_3^3 - \ldots \pm PA_{\frac{n-1}{2}}^3 = \pm \frac{(2 \, . \, r)^3}{2} = \pm 4r^3$$

u. s. f.

Fällen wir aber vom Mittelpunkt des Umkreises Lote auf die Diagonalen und Seiten des Polygons, so sind dieselben entsprechend gleich $\frac{1}{2}PA_1$, $\frac{1}{2}PA_2$, u. s w. und wir haben also:

„Bezeichnen wir die Entfernungen der Seiten und Diagonalen „eines regulären Polygons von ungerader Seitenzahl vom Mittel- „punkt des Umkreises ihrer Grösse nach mit e_1, e_2 $e_3 \, . \, . \, . \, e_{\frac{n-1}{2}}$ „so ist immer auch

$$e_1^{2p+1} - e_2^{2p+1} + e_3^{2p+1} - \ldots \pm e_{\frac{n-1}{2}}^{2p+1} = \frac{1}{2}r^{2p+1}$$

„wenn $2p + 1 < n$ und r der Halbmesser des Umkreises ist".

„So ist z. B. die Entfernung der Seite des gleichseitigen einem „Kreise einbeschriebenen Dreiecks vom Mittelpunkt $= \frac{1}{2}r$ und ebenso „der Unterschied der Entfernung der Seiten des Fünfecks und der „Diagonale gleich $\frac{1}{2}r$, und der Unterschied der Kuben dieser zwei ‚Entfernungen ist gleich dem halben Kubus des Halbmessers des „Umkreises". *)

---

*) Auch hier lassen sich eine Menge anderer Formeln ableiten, ist z. B.

4) Beschreiben wir weiter um den Mittelpunkt O (Fig. 2) einen zu dem ersteren concentrischen Kreis, so schneidet dieser die Strahlen PA in $2n$ Punkten P, die wir der Reihe nach durch B_1, B_2, B_3 ... B_n bezeichnen wollen. Es ist dann immer:

$$PB_1 + PB_{n+1} = PA$$
$$PB_1 + PB_{n+1} = \text{const.}$$

Bezeichnen wir PB_1 und PB_{n-1} mit σ und τ, so erhalten wir aber:

$$(\sigma^n + \tau^n) = (\sigma + \tau)^n + b_1(\sigma + \tau)^{n-2} + b_2(\sigma + \tau)^{n-1} + \dots$$

wo auch b_1, b_2 ... constante Werte sind. Bezeichnen wir aber wieder die Strahlen PB_1, PB_2, PB_3, ... mit ϱ_1, $-\varrho_2$, $+\varrho_3$, ... so finden wir hieraus und aus 1):

„Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt in der Ebene eines „Kreises n Strahlen, die den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile zer- „legen, und sind die Abschnitte, die dieser Kreis auf diesen Strahlen „bestimmt ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ..., so ist allemal

$$\varrho_1^{2p+1} - \varrho_2^{2p+1} + \varrho_3^{2p+1} - \dots + \varrho_{2n}^{2p+1} = 0$$
$$\varrho_1^{2q} + \varrho_2^{2q} + \varrho_3^{2q} + \dots + \varrho_{2n}^{2q} = \text{const.}$$

„wenn $2p+1 < n$ und $2q$ ebenfalls $< 2n$ ist“.

Wir brauchen kaum hinzuzufügen, dass hier und in 1) an Stelle dieser Potenzsummen andere cyklisch-symmetrische Functionen treten können.

5) Sind ferner die Gleichungen

$$L_1' = x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1 - p = 0$$
$$L_2' = x\sin\alpha_2 - y\cos\alpha_2 - p = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$L_n' = x\sin\alpha_n - y\cos\alpha_n - p = 0$$

---

der Halbmesser eines Kreises $= 1$, Seite und Diagonale des einbeschriebenen reg. Fünfecks x resp. y, so gelten die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = 5 \quad x^4 + y^4 = 15 \quad x^6 + y^6 = 50 \quad x^8 = y^8 = 175$$

Ebenso erhalten wir für das reg. Siebeneck, wenn x, y, z Seiten und Diagonalen sind:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7 \quad x^4 + y^4 + z^4 = 21 \quad x^6 + y^6 + z^6 = 70$$
$$x^8 + y^8 + z^8 = 245 \quad x^{10} + y^{10} + z^{10} = 872 \quad x^{12} + y^{12} + z^{12} = 3234$$

u. s. w.

gegeben, so bilden die durch diese Gleichungen dargestellten Geraden ein reguläres Polygon von n Seiten. Bilden wir aus diesen Grössen L aber dadurch, dass ihre Werte in eine cyklisch-symmetrische Function der L an Stelle der L selbst gesetzt werden, so werden in der entwickelten Function die Coefficienten offenbar auch solche cyklisch-symmetrische Functionen der Werte $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ sein müssen, oder es wird für den Fall, dass die Function von kleinerem als dem $n$ten Grade ist, in eine solche von (x^2+y^2) zerfallen. So wird z. B.

$$\Sigma L_1'^2 = \frac{n}{2}(x^2+y^2)+np^2$$

Eine unmittelbare Folge aus diesem ist aber der Satz:

„Beschreiben wir um den Mittelpunkt eines beliebigen regulären „Polygons von ungerader Seitenzahl L einen Kreis und fällen von „einem beliebigen Punkt dieses Kreises Lote auf die Seiten des „Polygons, und bilden wir aus diesen Loten eine solche cyklisch-„symmetrische Function, vom Grade p, so ist der Wert der Function „für alle Punkte des Kreises constant, wenn nur $p < n$ bleibt. So „ist insbesondere für jeden Punkt dieses Kreises auch die Summe „aller $p$ten Potenzen dieser Lote constant".

6) Um den Ursprung des Coordinatensystems möge weiter mit dem Halbmesser eins ein Kreis beschrieben sein, und von einem Punkt P der x-Achse mit der Abscisse x mögen nach den Ecken A eines dem Kreise einbeschriebenen n-Ecks Strahlen gezogen sein. Es ist dann für diese Strahlen immer die Gleichung

$$PA^2 = x^2+1-2x\cos\alpha$$

gültig, wo wir, um die verschiedenen Längen PA^2 zu erhalten, dem Werte α die entsprechenden Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zu geben haben. Wir werden dann auch für diesen Fall eine Reihe von solchen Relationen ableiten können. So werden wir z. B die Summe der $p$ten Potenzen der Quadrate dieser Entfernungen bilden können. Ist $p < n$, so erhalten wir aber mittelst unserer goniometrischen Beziehungen zwischen $\Sigma\cos^q\alpha$ wieder:

$$\Sigma P^{2p} = \Sigma((1+x^2)-2x\cos\alpha)^p$$

oder:

$$\Sigma \frac{PA^{2p}}{n} = (1+x^2)_p + \frac{p(p-1)}{(1!)^2} x^2(1+x^2)^{p-2}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{(2!)^2} x^4(1+x^2)^{p-4}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{(3!)^2} x^6(1+x^2)^{p-6}$$
$$+ \ldots + 1$$

und hieraus ohne Schwierigkeit:

$$\Sigma PA^{2p} = n \left\{ x^{2p} + \binom{p}{1}^2 x^{2p-2} + \binom{p}{2} x^{2p-4} + \ldots + 1 \right\}$$

Aendern wir jetzt die x-Achse oder mit andern Worten den Wert α_1, so beschreibt der Punkt einen Kreis, und wir finden daraus:

„Beschreiben wir um den Mittelpunkt eines reg. Polygons von „ungerader Seitenzahl einen Kreis, so ist die Summe der $2p$ten Po- „tenzen der Entfernungen irgend eines Punktes dieses Kreises von „den Ecken des Polygons constant, nämlich gleich

$$n \left\{ a^{2p} + \binom{p}{1}^2 a^{2p-2} \,.\, b^2 + \binom{p}{2}^2 a^{2p-4} \,.\, b^4 + \ldots \; b^{2p} \right\}$$

„wenn $p < n$, und a der Halbmesser des Umkreises des Polygons „b, der des beliebigen Kreises ist. Diese Summe bleibt zudem „constant, wenn der eine Kreis mit dem andern vertauscht wird. „Hat das Polygon eine gerade Seitenzahl, so bleibt der Satz mit „entsprechenden Aenderungen gültig".

Wir können diesen Satz ohne weiteres auch für den Fall $p = n$ ausdehnen, wollen dies jedoch unterlassen.

7) Auch im letzteren Falle können wir an Stelle der Summen der Potenzen solche Beziehungen, für die Summen der Combinationen etwa, ableiten. Wir wollen uns dabei aber auch diesmal auf das Product dieser Grössen PA^2 beschränken. Wir haben für dasselbe

$$\Pi PA^2 = \Pi(x^2 + 1 - 2x\cos\alpha)$$

oder entwickelt und die Werte aus den Gleichungen 21) eingesetzt:

$$\Pi PA^2 = (x^2+1)^n - \frac{1}{1!} nx^2(x^2+1)^{n-2} + \frac{1}{2!} n(n-3)x^4(x^2+1)^{n-4}$$
$$- \frac{1}{3!} n(n-4)(n-5)x^6(x^2+1)^{n-6} + \ldots - 2^n x^n \Pi\cos\alpha$$
$$= x^{2n}+1$$

$$+x^{2n-2} \cdot n(1-1)$$

$$+x^{2n-4} \cdot \frac{n}{2!}\left((n-1)-2(n-2)+(n-3)\right)$$

$$+x^{2n-6} \cdot \frac{n}{3!}\{(n-1)(n-2)-3(n-2)(n-3+3(n-3)(n-4) - (n-4)(n-5)\}$$

$$+x^{2n-8} \cdot \frac{n}{4!}\{(n-1)(n-2)(n-3)-4(n-2)(n-3)(n-4) + 6(n-3)(n-4)(n-5)-4(n-4)(n-5)(n-6) + (n-5)(n-6)(n-7)\}$$

$$+ \ldots - 2x^n \cos n\alpha$$

Betrachten wir aber etwa den Coefficienten von x^{2n-8}, so treten in diesen die Zahlen 1, 4, 6, 4, 1 als Factoren vor den Klammerausdrücken auf. Die Ausdrücke in der Klammer sind aber ihrerseits die Glieder einer arith. Reihe der 3ten Ordnung, und nach einem bekannten Satze verschwindet dann notwendig die Summe. Daraus folgt aber das Theorem von Cotes mit der Moivre'schen Erweiterung

$$\underline{\Pi PA^2 = x^{2n} - 2x^n \cos n\alpha + 1,} \quad \text{d. h.}$$

für $\alpha = 0$

$$\underline{\Pi PA^2 = (x^n - 1)^2}$$

für $\alpha = \frac{\pi}{n}$

$$\underline{\Pi PA = x^n + 1}$$

u. s. w.

IX. Quadratur der Fusspunktencurve des Kreises.

Wie wir in VIII. 5) sahen, können wir zwischen den Loten eines Punktes auf die Seiten eines reg. Polygons eine Menge von Relationen aufstellen, die auf Kreise als geometrische Oerter für den Punkt führen. Bilden wir so etwa die Function:

$$L_1' \cdot L_2' + L_2' \cdot L_3' + L_3' \cdot L_4' + \ldots + L_n' \cdot L_1' = \text{const.}$$

so giebt uns die Entwicklung dieses Orts aber die Gleichung

$$(x^2+y^2) \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\frac{2\pi}{n} + np^2 = \text{const.} \quad \text{siehe Gl. 30), oder:}$$

wenn wir mit $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$ die Entfernungen eines Punktes von den Seiten des Polygons, mit

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die Entfernung desselben vom Mittelpunkt des Polygons bezeichnen, dann ist immer:

$$\tfrac{1}{2} n\varrho^2 + np^2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_4 + \ldots + e_n \cdot e_1$$

Verbinden wir die Fusspunkte der aufeinander folgenden Lote auf die Seiten aber durch gerade Linien, so erhalten wir ein Polygon das wir als Fusspunktenvieleck bezeichnen wollen. Je zwei aufeinander folgende Lote bilden aber mit einander einen Winkel $= \frac{2\pi}{n}$ und wir erhalten daraus als Inhalt des Fusspunktenvielecks den Wert

$$F = \tfrac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} (e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_3 + \ldots + e_n \cdot e_1)$$

oder:

$$F = \tfrac{1}{4} n \cdot \varrho^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} + \tfrac{1}{2} np^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

oder:

$$F = \tfrac{1}{8} n \cdot \sin \frac{4\pi}{n} \cdot \varrho^2 + \tfrac{1}{2} np^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

Lassen wir die Seitenzahl des Vielecks jetzt in's unendliche wachsen, so können wir anstatt des Sinus den Winkel selbst setzen und erhalten daraus für den „Inhalt der Fusspunktencurve des Kreises für einen beliebigen Pol, der die Entfernung ϱ vom Kreismittelpunkt hat,

$$F = \tfrac{1}{2} \varrho^2 \pi + p^2 \pi$$

p ist hiebei der Halbmesser des Kreises geworden“.

Schlussbemerkung.

Die hier entwickelten Relationen legen es nahe zu vermuten, dass auch für die regulären Polyeder analoge Beziehungen gültig sein werden. Dem ist in der Tat so. Wir erhalten z. B. wenn wir die Summen der $2p$ten Potenzen der Entfernungen eines Punktes P von den Ecken A eines solchen Polyeders mit Σr^{2p} bezeichnen,, z. B.:

„Bewegt sich der Punkt P auf einer Kugel, deren Mittelpunkt „mit dem Mittelpunkt eines reg. Polyeders zusammenfällt, so ist für

„das reguläre Tetraeder Σr^2 und Σr^4, für das Hexaeder und Okta-
„eder Σr^2, Σr^4 und Σr^8 und für das Dodekaeder und Ikosaeder
„Σr^2, Σr^4, Σr^6 und Σr^8 je gleich einer Constanten“.

Wie wir bei den reg. Polygonen z. B. die Ecken durch congruente gleichschenkl. Dreiecke abstumpfen könnten, ohne dass alle die oben entwickelten Relationen für die entstandenen Polygone ungültig werden, ebenso könnten wir auch entsprechend die Ecken dieser Polyeder abstumpfen und würden wir dann Relationen erhalten. Doch wollen wir uns darauf beschränken in beiden Fällen darauf hingewiesen zu haben.

Stuttgart, im März 1897.

IV.

Eine neue Beziehung zwischen den Krümmungen von Curven und Flächen.

Von

R. Hoppe.

Die Entdeckung der Beziehung zwischen der Hauptkrümmung der allgemeinen konischen Fläche und dem Krümmungsverhältniss einer ebenso allgemeinen Curve, welche Mangeot in Soc. Math. de France Bull. XXIV. p. 98 mitteilt, ist wol von genügendem Interesse, um sie den Principien der analytischen Geometrie anzufügen. Die Beziehung ist in den fundamentalen Ausdrücken beider Grössen unmittelbar gegeben.

Die genannte Fläche wird von einem Strahle in der Richtnug der Tangente der Curve erzeugt. Bezeichnen fgh, $f'g'h'$, lmn die Richtungscos. der Tangente, Hauptnormale, Binormale, τ und ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel, v den Bogen der Curve, ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche, u den Strahl, so sind die Gleichungen der Fläche in den Parametern u, v:

$$x = uf; \quad y = ug; \quad z = uh$$

woraus die Werte der Fundamentalgrossen

$$e_1 = \frac{\partial x^2 + \ldots}{\partial u^2} = 1; \quad f_1 = \frac{\partial x^2 + \ldots}{\partial u\, \partial v} = 0;$$

$$g_1 = \frac{\partial x^2 + \ldots}{\partial v^2} = \left(u \frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2$$

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots = 0; \quad F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + \ldots = 0;$$

$$G = p\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \ldots = \frac{\partial \tau\, \partial \vartheta}{\partial v^2}$$

leicht folgen. Hier ist p Richtungscos. der Normale $= l$. Da die eine Hauptkrümmung null ist, so hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{e_1 G_1}{e_1 g_1 - f_1^2} = \frac{1}{u} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

Diese Gleichung spricht den Satz von Mangeot aus: „Der Hauptkrümmungsradius ϱ_1 variirt proportional dem Strahle u, und der Coefficient des Verhältnisses ist gleich dem Krümmungsverhältniss der Curve.“

Litterarischer Bericht

LXI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

History of modern mathematics. By David Eugene Smith, Professor of mathematics in Michigan-State Normal School. Reprinted from „Higher mathematics". Published by John Willy and sons, New-York. Chapman and Hall. Limited, London 1896. 70 S.

Das Werk ist eine zeitgemässe und verdienstliche Unternehmung, wie sie wol in gleichem Sinne bisher noch nicht in Angriff genommen worden ist. Es ist charakteristisch für unser Zeitalter, dass die Richtungen der mathematischen Forschung sich immer schneller vervielfältigt haben, indem Zweige der Doctrin immer neue Fragen und Probleme hervorriefen. Hiernach erscheint nun eine übersichtliche Zusammenstellung der gegenwärtigen Forschungsrichtungen als ein immer wachsendes Bedürfniss. Mit gutem Grunde beschränkt sich die vorliegende Bearbeitung auf das Notwendige und beobachtet die grösst mögliche Kürze. Nur die Ketten der Untersuchungen, welche gemeinsames Ziel anstreben, sind es, was aus der Litteratur zugezogen wird. Von jeder solchen Untersuchungsfolge wird der Ursprung nach Autor und Jahrzahl angegeben, auf dessen Schrift in Fussnoten verwiesen, ferner die Abzweigungspunkte, in denen verschiedene Autoren eine Untersuchung von eigentümlicher Seite angegriffen haben, bemerkt, auch der Standpunkt der noch ungelösten Frage ans

Licht gestellt. Dagegen werden alle Beiträge, welche die Frage unverändert bestehen lassen, übergangen und über die Motive der Untersuchungen keine Kritik geübt, mithin kein Unterschied gemacht, ob eine solche durch ein vorhandenes Problem gefordert wird oder nicht, sondern allein als massgebend betrachtet, dass Viele der eröffneten Bahn gefolgt sind. 18 Zweige der Doctrin sind getrennt behandelt. Mechanik sowie alle weitern Anwendungen der Mathematik sind ausgeschlossen. H.

Index operum Leonardi Euleri. Confectus a Joanne G. Hagen s. j. Directore speculae astronomicae Collegii Georgiopolitani Washington D. C. Berlin 1896. Felix L. Dames. 80 S.

Es werden 796 Schriften von Euler, grösstenteils in lateinischer Sprache, auch manche in französischer aufgeführt, und zwar 28 Bücher. Die Gegenstände der Abhandlungen sind: Zerlegung der Zahlen in Summen, Teilbarkeit der Zahlen, diophantische Analysis, imaginäre Grössen, Reihen, besondere Reihen, Brüche, algebraische Gleichungen, elemetare Geometrie , analytische Geometrie, Differentialgeometrie, Differentialrechnung, Integralrechnung, bestimmte Integrale, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Principien der Mechanik, Probleme der Mechanik, Hydromechanik und Aeromechanik, Maschinen und Reibung, Elasticität, Schall und Musik', Licht und Wärme, optische Instrumente, Magnetismus, sphärische Astronomie, Sonne und Mond, Planeten und Kometen, Wahrscheinlichkeit, Philosophisches. H.

Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie. Von A. von Braunmühl. Mit 1 Tafel Nr. 1. Halle 1897. Wilhelm Engelmann in Leipzig. 4°. 30 S.

Die vorliegende Schrift, welche auf selbständiger Forschung beruht und manche Unrichtigkeiten enthüllt, behandelt nach einander die Trigonometrie der Griechen, der Inder, der Araber und schliesst mit Johannes Müller Regiomontanus. Lange Zeit bestand die Doctrin aus wenigen Methoden, Sätzen und Formeln, welche zur Lösung astronomischer Aufgaben in Anwendung waren, eine Anwendung die auf Projection beruht, von den Griechen erfunden ist, von denen sie die Babylonier gelernt haben. Regiomantanus war in Europa der erste, welcher die Trigonometrie zuerst zu einer Wissenschaft gestaltet hat. Erst viel später entdeckte man, dass schon 200 Jahr früher ein Perser das vollständige System der Lehren aufgestellt hat. H.

Nassir Eddin Tusi und Regiomontan. Von A. v. Braunmühl. Mit 2 Tafeln Nr. II. und III. Halle 1897. Wilh. Engelmann, Leipzig. 4°. 37 S.

Nassir Eddin Tusi ist der obengenannte Perser, welcher im 13. Jahrhundert die vollständige Trigonometrie, ebene und sphärische, lehrte. Sein Buch, besprochen von Suter in Bibliotheca Mathematica 1873 p. 1—8, ist, wie die erstere Schrift von Braunmühl sagt, den Arabern nicht bekannt gewesen und wird nun mit den Lehren der Araber im einzelnen in Vergleich gestellt. Das Lehrsystem lässt sich daraus nicht entnehmen; nach allem daraus Angeführten ist es kein so einfach gestaltetes wie das heutige. Im zweiten Teile der Schrift wird die Lehre des Regiomontan damit verglichen. H.

F. E. Neumann. Von A. Wangerin. Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV. 1894—5. Berlin, Georg Reimer. 15 S.

Franz Ernst Neumann, geboren den 11. September 1798 in Joachimsthal, besuchte von seinem 9ten Jahre an das Werder'sche Gymnasium in Berlin, studirte von 1817 an Theologie in Berlin und Jena, wandte sich 1819 in Berlin den Naturwissenschaften zu, insbesondere der Mineralogie, trieb aber dabei privatim Mathematik, hielt 1823 eine Reihe von Vorlesungen über seine neue Methode der Krystallprojection vor einem ausgewählten Kreise von Zuhörern, promovirte 1826, habilitirte sich an der Universität Königsberg, ward 1828 ausserordentlicher, 1829 ordentlicher Professor daselbst und starb am 23. Mai 1893. Seine ausgedehnte und erfolgreiche Wirksamkeit ist bekannt. Seine wissenschaftliche Productivität ist nur zu verhältnissmässig geringem Teil durch eigene Publication zur Verbreitung gelangt, im übrigen teilte er seine Entdeckungen bloss seinen Zuhörern mit. Gegenwärtig ist es indes von Seiten dieser im Werke, seine Vorlesungen herauszugeben, und sind bis 1895 bereits 7 Bearbeitungen erschienen; beteiligt sind die Herren C. Pape, Von der Mühll, E. Dorn, G. E. Meyer und A. Wangerin.

H.

Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Von Gustav Wertheim, Professor an der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M. Zweite, verbesserte Auflage. Braunschweig 1896. Vieweg und Sohn. 68 S.

Elia Misrachi war von 1495 bis 1526 Oberrabiner in Constantinopel, in der ersten Zeit der Türkenherrschaft, wo die Sultane die aus Spanien vertriebenen Juden mit grosser Begünstigung aufnahmen und ihnen hohe Aemter verliehen, und die Juden Handwerke, Künste und Wissenschaften trieben, ein Eifer freilich, der nicht lange gedauert hat. Das in Rede stehende Buch ist eines seiner in hebräischer Sprache verfassten und unter hebräischen Titeln aufgeführten Werke. Es werden einige Quellen, arabische und griechische, genannt, aus denen seine Lehre geschöpft ist. Vor allem ist zu erwähnen, dass er mit indischen Ziffern schreibt und rechnet, die Null anwendet, nebenbei manchmal hebräische Buchstaben statt der 9 Ziffern schreibt, nebenbei auch ausser der sonst zugrunde gelegten Decimalteilung die Sexagesimalteilung zur Approximation benutzt. Dagegen fehlt ihm ganz der Begriff der negativen Zahl; er muss daher immer Fälle unterscheiden. Bei der Addition und Multiplication werden auch die arithmetischen und geometrischen Reihen in Betracht gezogen und summirt. Bei der Potenzrechnung handelt es sich besonders um die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel; das Verfahren ist dem heutigen wesentlich gleich; zur Approximation wird der Radicand mit 10^{2n} multiplicirt. Auf die hiermit abschliessende Lehre von der discreten Zahl folgt nun in der Bedeutung als Rechnung mit stetigen Grössen die rechnende Geometrie und Astronomie, das ist dann nur die Rechnung mit benannten Zahlen. H.

Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus publié d'après le ms. latin 13084 de la bibliothèque royale de Munich par M. Victor Mortet. Avec une introduction de M. Paul Tannery. Tiré des notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale et autres bibliothèques. Tome XXXV. 2e partie. Paris 1896. C. Klincksieck. 4°. 44 S.

Die Einleitung von Tannery gibt Auskunft über die Quellen, nämlich lückenhaften Manuscripte aus dem Mittelalter, aus denen Cantor und Curtze den Text der 2 genannten Abhandlungen über Feldmessung und Geometrie zusammengestellt haben. Diesen Quellen fügt nun Mortet ein neues, in der Münchener Bibliothek gefundenes Manuscript hinzu und gibt hier auf 18 Seiten den lateinischen Text. Die eine Abhandlung enthält die Berechnung der Flächeninhalte der einfachsten ebenen Figuren, die andre die der Säulen. H.

Hermann Grassmann's gesammelte mathematische und phy-

sikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jakob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel.

Ersten Bandes erster Theil: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Unter Mitwirkung von Eduard Study. Mit einem Bilde Grassmann's in Holzschnitt und 35 Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G Teubner.

I. Band. II. Theil: Die Ausdehnungslehre von 1862. Leipzig 1896. B. G. Teubner.

Die letztere Ausdehnungslehre unterscheidet sich von der ersteren dadurch, dass Grassmann von vorn herein darauf verzichtet, sein System unabhängig von der Analysis zu entwickeln. Engel bezeichnet dies als einen wesentlichen Fortschritt: erstere stehe auf keiner ganz sichern Grundlage; die Grundbegriffe, von denen Grassmann ausgehe, seien so allgemein und so inhaltslos, dass sie zum Aufbau eines wirklichen Systems nicht genügen, und Grassmann müsse daher, um zu einem solchen Systeme zu gelangen, später stillschweigend in seine Grundbegriffe viel mehr hineinlegen, als die von ihm aufgestellten Erklärungen besagen.

Nun hat aber Grassmann bei erstem Auftreten auf jene Allgemeinheit den grössten Wert gelegt und es als seinen unterscheidenden didaktischen Grundgedanken ausgesprochen: wenn irgend ein Punkt in der mathematischen Doctrin schwer zu verstehen sei, so sei nur der Ausgangspunkt der Doctrin nicht allgemein genug. Hat dann Grassmann in der neuen Bearbeitung diesen Grundgedanken fallen lassen, und Engel denselben verworfen, d. h. nicht als unwesentlich beseitigt, sondern es wirklich einen Fortschritt genannt, dass er aufgegeben sei, so kann man doch gewiss nicht umhin zu fragen: Was ist dann die unterscheidende Basis von Grassmanns Lehre?

Darüber sagt Engel absolut nichts. Alles, was er sagt, ruft dieselbe Frage hervor. Ein Fortschritt setzt doch ein Ziel oder wenigstens eine Richtung voraus. Die Behauptung, dass die neue Lehre einwandfrei sei, ist gerade hier besonders zweideutig, denn gegen Inhaltsloses kann man nicht streiten. In der neuen Bearbeitung hat der Herausgeber viele Unrichtigkeiten gefunden und in gegenwärtiger Ausgabe berichtigt. Er erklärt die Irrtümer für un-

wentlich. Auch hier muss man fragen: Was ist dann des Wesentliche von der Lehre? Er bemerkt, dass die Ausdehnungslehre selbst in der verbesserten Gestalt noch bei Wenigen Anerkennung gefunden habe, und sorgt zwar für Verbreitung und Zugänglichkeit des Buches, aber mit keinem Worte dafür, ihre Stellung und Leistung in der Wissenschaft zu documentiren, trotz der 50jährigen Erfahrung, dass ihr Vorhandensein allein nicht dazu geführt hat.

Der 2. Teil hat die Abschnitte: die wichtigsten Verknüpfungen extensiver Grössen; Functionslehre; Grassmann's Untersuchungen über das Pfaff'sche Problem. Der erste enthält die 5 Capitel: Addition, Subtraction, Vervielfachung und Teilung extensiver Grössen; die Productbildung im allgemeinen; combinatorisches Product; inneres Product; Anwendungen auf die Geometrie — der zweite die 4 Capitel: Functionen im allgemeinen; Differentialrechnung; unendliche Reihen; Integralrechnung. H.

Methode und Principien.

Kritik der Formel der Newton'schen Gravitations-Theorie. Von A. Sinram. Hamburg 1896. Lucas Gräfe u. Sillem. 44 S.

Die Schrift ist ein neuer Versuch die bestehende Himmelsmechanik zu stürzen. Dies wird hier auf rhetorischem Wege in Angriff genommen, anders lässt sich das Verfahren wol kaum bezeichnen: es ist fern von aller wissenschaftlichen Logik; so viel Schlüsse vorkommen, sind die Argumente so voreilig und unzureichend als möglich.

Hoppe.

Démonstration de l'axiome XI. d'Euclide. Par Michel Frolov, Membre de la Société Mathématiques de France. Deuxième édition. Genève 1896. W. Kundig et fils. 22 S.

Der Fehler des Beweises ist kein verborgener. Der Verfasser ist durch seine Figur, nämlich die zu Theorem *C*, getäuscht; welche nur unter Voraussetzung der zu beweisenden Thesis die der Behauptung entsprechende Lage der gezeichneten Lote darbietet. Da dieses Theorem im Grunde mit den Parallelensatze identisch ist, so konnte man gewiss sein, den Fehlschluss darin zu finden.

Hoppe.

Der Festpunkt des Denkens. Von H. Gimler. Lissa i. P. 1896. Friedrich Ebbecke. 22 S.

Die Schrift besteht aus 46 Urteilen über Lebewesen, Tätigkeit, Gleichgewicht, Ganzes und Teile, Verständigung, Ausdehnung und Zusammenziehung, Druck, Intensität, Verhältnisse, Wahrheiten, einzeln nebst sogenanntem Beweis und Bestätigung, zumteil selbstverständlich, zumteil unklar, und schliesst mit dem Satze: Die Anordnung der Lebewesen bildet den Festpunkt des Denkens.

Hoppe.

Ein Deutsches Testament. Die Natur als Organismus. Von Hugo Astl-Leonhard. Wien 1897. Selbstverlag. 262 S.

Der erste Titel soll dem Gesamtwerk gelten, der zweite dem jetzt erschienenen 1. Teile, dem noch 2 andere folgen sollen. Der 1. Teil besteht wieder aus 3 „Büchern" mit den Ueberschriften: Das antike und moderne Wissen und die Erkenntnisssätze der Wirklichkeit; die Materie und ihre Reiche, ihre Entwickelung als Spannung und Entladung; der Mensch und sein Geistesleben. Es wird viel Gelehrsamkeit vorgetragen, doch eine fortschreitende Entwickelung lässt sich darin nicht entdecken. Die Lösung der philosophischen Fragen, von der der Verfasser sagt, dass sie sich ihm ohne Zwang und ohne Speculation ergab, denkt er sich sehr leicht: er stellt eine Formel auf, damit ist's getan; ob sie klar ist, kümmert ihn nicht; jedenfalls kann man damit nichts anfangen. Hoppe.

Das Beharrungsgesetz. Von Paul Johannesson. Berlin 1896. R. Gaertner (Hermann Heyfelder). 4°. 26 S. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. Ostern 1896.

Die 5 Teile der Schrift sind: Die Form, der Inhalt des Beharrungsgesetzes. Die Irrtumquelle desselben. Welchen Wert hatte es? Seine Wahrheit in neuer Form Gleich im Anfang ist es höchst brav gesprochen, wo der Verfasser sagt: Es ist erklärlich, wenn Newton als Schöpfer der Himmelsmechanik, im Ausdruck fehlend, der Beharrung eine Kraft, ein Vermögen unterlegt; aber darüber muss man sich wundern, dass noch heutzutage viele Schulbücher denselben Irrtum lehren. Charakteristisch für den Gedankengang in vorliegender Schrift ist es nun, dass sie ihren Gegenstand nicht direct nach eigenem Urteil aufasst, sondern Begriff und Theorie als

heutzutage geltende den Ansichten von Schriftstellern entnimmt, genannt sind: Lodge, C. Neumann, Mach, L. Weber, Streintz — und über diese Kritik übt. Dadurch wird die an sich einfache Untersuchung sehr in die Länge gezogen, fremde und trennbare Fragen mit eingemischt und immer grössere Verwickelungen geschaffen. Doch hat dieser Weg wenigstens die gute Folge gehabt, dass der Verfasser dadurch zu gesteigerter Gründlichkeit genötigt ward, demgemäss auch richtiger urteilte, als es gewöhnlich geschieht, und im Verlaufe immer verständlicher sprach Es handelt sich hier namentlich um die Natur menschlicher Erkenntniss und um die Relativität der Raumbestimmung und Bewegung. In Betreff der Erkenntniss ist, wenn auch nur zumteil ausgesprochen, dem Verfasser doch gewiss nicht fremd, dass sie in der Unterwerfung der Tatsachen unter die Herrschaft des Geistes besteht, und ihre Mittel, nämlich Begriffe, Vorstellungsweisen und Theorien, nach freier Wahl vom Menschen erzeugt werden. Dagegen zeigt sich der Verfasser zu wenig orientirt, indem er ohne weiteres diese Freiheit für gleichbedeutend mit Willkür hält. Nur die überflüssige Stoffanhäufung macht es erklärlich, dass er hier über dem Mittel den Zweck vergisst und es nicht beachtet, dass uns die Freiheit dazu dient und dienen soll, den grösst möglichen Gewinn an Erkenntniss zu ziehen. Dies zeigt sich in Betreff der Relativität der Bewegung und macht hier die vorher gründliche Logik wieder zunichte. Alle räumlichen Bestimmungen, sowol von Orten als von Bewegungen, sind anfänglich relativ. Sie zu absoluten zu machen, ist notwendige Bedingung der Erkenntniss, namentlich der Dynamik. Es hätte sehr zur Klarstellung gedient, wenn der Verfasser diesen Umstand in voller Allgemeinheit ausgesprochen hätte. Im Einzelnen findet er freilich Anlass auf ihn einzugehen; schon Newton erkannte das empirische Kriterium der Drehbewegung; der Verfasser aber hält dasselbe für illusorisch, weil wir kein Kriterium der geradlinigen Bewegung besitzen, und ist sehr schnell mit der Behauptung fertig, dass alle räumliche Bestimmung auf Vereinbarung beruhe, ohne sich nach den notwendigen Forderungen der einzelnen Theorien umzusehen. Zieht man diese allseitig in Betracht; so bleibt der freien Vereinbarung nur wenig (z. B. Längen- und Zeiteinheit, erster Erdmeridian etc.) übrig. Dass jedenfalls die Drehbewegung (fühlbar für den Menschen und unentbehrlich für die Dynamik, namentlich für die Theorie der Centralbewegung) nicht zu den der Vereinbarung unterliegenden Bestimmungen gehört, sondern nur ihre Epoche, d. i. die momentane Stellung, ist offenbar. Der Verfasser leugnet es, wol nur aus einem gewissen horror exceptionis. Andrerseits ist auch die Vereinbarung nicht immer ausreichend, das Relative absolut zu fixiren. Von den 3 Raumanordnungen, der skopocentrischen, geocentrischen, heliocen-

trischen kann keine die andern ersetzen, somit vermag es auch keine Vereinbarung; überall sind es scientive Gesichtspunkte, welche die Wahl der Axenkreuze bestimmen. Der Verfasser führt 3 vorauszusetzende Begriffe auf, welche erst durch Vereinbarung zu bestimmen seien, bevor man ein Beharrungsgesetz lehren könne: die geradlinige, die gleichmässige Bewegung und die Masse. Dies ist insofern unrichtig, als diese Begriffe bis auf die Masseinheiten, die hier gleichgültig sind, als Grundlagen von Theorien nicht abgeändert werden können, ohne wenigstens deren Einfachheit preiszugeben. Hierbei zu verweilen haben wir keinen Grund, es ist alles nur ein Abschweif, auf den der Verfasser durch sein historisches Verfahren gelenkt worden ist. Seine anfängliche, oben erwähnte, Aeusserung liess erwarten, dass er nicht daran denken würde, dem sogenannten Beharrungsgesetz einen positiven Inhalt zuzuschreiben. Die Schrift schliesst mit der Frage, ob der Unterricht in der Mechanik von ihren Ergebnissen berührt werde. Eine definitive Formulirung des Beharrungsgesetzes gemäss diesen Ergebnissen wird nicht aufgestellt, es können wol nur die 3 genannten Bedingungen mit den Ergebnissen gemeint sein; was aber dann in der Ueberschrift die „neue Form" des Satzes bedeuten soll, ist schwer zu erraten. Dies gibt uns Anlass auf den Anfang der Schrift zurückzugehen und von dem zu sprechen, was sie im weiteren zu sagen versäumt Es wird gerügt, dass viele Lehrer und Schriftsteller eine Kraft aller Körper, in ihrer Bewegung zu beharren, statuiren, d. h. offenbar: einen Grund dafür bedürfen, dass etwas sich nicht ohne Grund ändert. So angesehen erscheint allerdings das Beharrungsgesetz als eine ganz überflüssige Lehre. Indessen, um es so anzusehen, muss doch ein Wissen vorausgehen, das dem Unkundigen fremd sein wird, das also die Schule zu verleihen verpflichtet ist: der Schüler muss erst lernen die Bewegung als jenes Etwas aufzufassen, welches dem Körper in jedem Augenblicke bestimmend zukommt und sich nicht ohne Grund ändern kann. Der zu lernende Grundsatz der Dynamik lautet: Momentaner Ort und momentane Bewegung bestimmen den momentanen Zustand jedes Punktes eines Körpers. Ein Lehrer, der ihn zu umgehen sucht, umgeht damit das Verständniss der Dynamik. Wer ihn kennt, dem ist der sogen. Beharrungssatz selbstverständlich und überflüssig. Ihn Anfängern deutlich zu machen, bedarf es keiner höhern Doctrin, sondern nur eine Auswahl nahe liegender Beispiele In vorliegender Schrift steht er nicht, und das eben ist der fehlende Punkt in der ganzen Behandlung des Gegenstandes. Hoppe.

Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wir-

kungen. Von Dr. C. Neumann, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig. Geheimer Hofrath, Ordentliches Mitglied der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Auswärtiges Mitglied der Kgl. Societät der Wissenschaften zu Göttingen. Correspondirendes Mitglied der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, des Instituto Lombardo und Akademie zu Bologna. Leipzig 1896. B. G. Teubner. 292 S.

Es möge genügen den Inhalt der 9 Capitel anzugeben. Einleitende Untersuchungen. Aus der Vorstellung des elektrischen Gleichgewichts entspringende Schlussfolgerungen. Nähere Bestimmung des Exponentialgesetzes. Ueber die Entwickelung des Exponentialgesetzes nach Kugelfunctionen. Anwendung des eingliedrigen Exponentialgesetzes auf die Theorie der Gravitation und auf die Theorie der Elektrostatik. Allgemeine Untersuchungen über die mehrgliedrigen Exponentialgesetze. Ueber das Green'sche Gesetz. Ueber das Hamilton'sche Princip und das effective Potential. Ueber die Integration der Differentialgleichung: $\Delta\psi = \sigma^2\psi$ unter Anwendnng der Methode des arithmetischen Mittels. H.

Naturphilosophie als exacte Wissenschaft. Mit besonderer Berücksichtigung der mathematischen Physik. Von C. Schmitz-Dumont. Mit vier Figurentafeln. Leipzig 1895. Duncker u. Humblot. 494 S.

An der Schrift ist anzuerkennen, dass sie an keiner Autorität haftet, um von ihr Recht und Ansehen zu borgen, sondern an den Ansichten der Gelehrten wie an den invteerirten der Menge unparteiisch die Schwächen enthüllt. Dies verbunden mit einer geschickten, und nicht sophistischen, sondern auf Klarheit gerichteten Handhabung der Sprache vermag im Anfang die besten Hoffnungen auf befriedigende Lösung ihrer Aufgabe zu erwecken. Eigentümlich an ihr ist, dass alle Auseinandersetzungen auf Antithesen gebaut werden; eine Antithese ist dem Verfasser notwendig für jedes Urteil, und wenn er eine solche aufgegriffen hat, mag sie auch bloss auf oberflächlichem Eindruck seiner Lecture beruhen, so erscheint sie ihm als hinreichende Rechtfertigung seiner Behauptungen statt aller Begründung. Der erste Fall dieser Art bezieht sich auf die historische Philosophie der Neuzeit und ist bestimmend für die Richtung der vorliegenden Arbeit. Der Verfasser nennt die speculative Philosophie und den Materialismus die Pole der Philosophie, gleichsam ihren Geist und Leib. Alle aufgetretenen Fehler, Mängel, Verirrungen und alles Mislingen sei nur Folge ihrer Einseitigkeit; die Natur-

philosophie, wie er das Wort verstehe, müsse beide als einander notwendige Gegensätze in sich vereinigen. Diese Vereinigung ist's, was er sich zur Aufgabe macht. Die Abschnitte des Buchs sind betitelt: Topik der Begriffe. Philosophie der mathematischen Wissenschaften. Physikalische Erklärung durch Hypothesen. Logischer Aufbau der Physik. Die Aussenwelt. Die Innenwelt Körper und Geist. Die Reihenfolge der Themata ist für die Beurteilung bedeutungslos. Was zunächst den obigen zu vereinigenden Gegensatz von speculativer Philosophie und Materialismus betrifft, so ist zweierlei an der Aufstellung zu vermissen. Erstens werden beide jedes als Ganzes betrachtet, ohne doch das Specifische zu nennen, was sie zum Ganzen macht. Die Geschichte bietet zwei Reihen verschiedenartiger Erscheinungen dar, zwischen denen man mancherlei Gegensätze finden kann. Unter diesen hat der Verfasser nicht gerade das Beste, sondern vorzugsweise Ausartungen gewählt, um es anzuführen. Da er beide Arten acceptirt und aufrecht halten will, so lag es ihm als Philosophen doch gewiss ob, über die zwei entgegengesetzten Grundgedanken jener Erscheinungen, welche er im Sinne hat, keinen Zweifel bestehen zu lassen. Zweitens ist auch nichts darüber gesagt, in welchem Sinne der Verfasser beide Arten von Philosophie zu vereinigen denkt. Das factische Zuwerkegehen lässt nur eine Halbheit nach beiden Seiten hin erkennen. Von den schlimmsten Vorurteilen der speculativen Philosopie, die längst durch die Geschichte gerichtet sind, hat er sich noch nicht frei gemacht. Er hängt noch immer an der Meinung fest, dieselbe sei berufen und notwendig dazu der materiellen Forschung voranzuleuchten und sie vor Verirrungen zu bewahren und verfolgt noch immer die Chimäre des absoluten Wissens, sieht demgemäss die Hypothese für einen Notbehelf an. Auf diesem Standpunkte bleibt natürlich die Bedeutung inductiver Forschung unverstanden, und so erscheint ein grosser Teil des Buches, nämlich die 3 Abschnitte über Mathematik und Physik, als Gedanken eines Laien beim Lesen gelehrter Schriften. Sehen wir aber von den Urteilen über die auf festen Principien ruhenden Wissenschaften ab, so bieten die übrigen 4 Abschnitte Vieles von hinreichendem Werte dar um Interesse zu erwecken. Die psychische Genesis wird ein wenig gründlicher beobachtet, als es gewöhnlich geschieht; der restirende Mangel in dieser Hinsicht mag vielleicht zum weitern Fortschritt die Anregung geben. So ist z. B. die Willensfreiheit, welche heutzutage Viele trotz dem Bewusstsein aus Vorurteilen leugnen, anerkannt und als Beweis die Fähigkeit der Negation in Idee und Handlung (in der Tat das deutlichste Indicium) aufstellt. Dagegen beschränkt sich die psychische Beobachtung des Verfassers stets dahin, dass er in einem Dualismus Halt macht, der sich bei mehr Gründlichkeit bald lösen würde. Die Aussenwelt erscheint ihm

noch als ursprünglich gegeben im Gegensatz zum Ich. Das Ich hält er nur für möglich im Gegensatz zur andern Person u. s. w. alles wahrscheinlich nur, weil für seine Logik die Antithese unentbehrlich ist, und er deren Verlust schon im voraus fürchtet.

Hoppe.

Logische Uebungen. Von Karl Strecker, Doctor der Philosophie. 1. Heft. Der Anfang der Geometrie als logisches Uebungsmaterial, zugleich als Hilfsmittel für den mathematischen Unterricht. Essen 1896. G. D. Baedeker. 61 S.

Es wird erst die einfachste Form der Schlüsse erklärt, dann eine Reihe elementarer Lehrsätze und Aufgaben über Winkel und Dreiecke ausgeführt, deren Beweise die leichtesten Anwendungen des gezeigten Schlussverfahrens darstellen. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Du Bois-Reymond, Emil, Hermann v. Helmholtz. Gedächtnissrede. gr. 8°. (80 S.) Leipzig, Veit & Co. 2 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. 8. Jahrg. 1894. 4. Hft. Berlin, Springer. 5,60 Mk.

Fortschritte, die, der Physik i. J. 1891. Dargestellt v. d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. 47. Jahrg. 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. gr. 8°. (XLVII, 621 S.) Braunschweig, Vieweg. 25 Mk.

Goldbeck, Ernst, die Gravitationshypothese bei Galilei u. Borelli. 4°. (31 S.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Obenrauch, Ferd. Jos., Geschichte der darstellenden u. projektiven Geometrie mit besond. Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich u. Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Oesterreich. gr. 8°. (VI, 442 S. m. 2 Bildn.). Brünn, C. Winiker. 9 Mk.

Photographen-Bibliothek, deutsche. V. Bd. Rohr, Mor., zur Geschichte u. Theorie des photographischen Teleobjectivs mit besonderer Berücksichtigung der durch die Art seiner Strahlenbegrenzung bedingten Perspektive. gr. 8°. (VIII, 41 S. m. 7 Fig.) Weimar, Photographen-Zeitg. Kart. 2,50 Mk.

Poggendorff's Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften 3. Bd. 8. u. 9. Lfg. Leipzig, Barth. à 3 Mk.

Methode und Principien.

Bachmann, F., u. Rich. Kanning, Methodik zu dem Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. gr. 8°. (70 S.) Leipzig, Freytag. 80 Pf.

Bucherer, Alfr. H., eine Kritik der Nernst'schen thermodynamischen Anschauungen. Eine Antwort auf die Kritik meines Buches: Grundzüge einer thermodynamischen Theorie elektrochemischer Kräfte. gr. 8°. (31 S.) Freiberg, Craz u. Gerlach. 60 Pf.

Grimm, O. u. W. Kaufmann, Praxis des Rechenunterrichts in der Volksschule. gr. 8°. (78 S.) Hamm, Breer & Thiemann. 1 Mk.

Hollefreund, Karl, Anwendung des Gauss'schen Principes vom kleinsten Zwange. 4°. (24 S. m. 2 Taf.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Lefler, Methodisches aus dem Unterrichte in der Arithmetik. gr. 8°. (25 S.) Gotha, Thienemann. 60 Pf.

Močnik, Frz. v., der Rechen-Unterricht in der Volksschule. Eine methodische Anleitung für Volksschullehrer. 6. Aufl. gr. 8°. (238 S. m. Fig.) Leipzig, Freytag. Geb. 3 Mk.

Schleichert, F., Beiträge zum Unterricht in der Raumlehre mit besonderer Berücksichtigung der geometrischen Formenlehre. gr. 8°. (28 S.) Leipzig, Haacke. 50 Pf.

Zehmler, L., die Mechanik des Weltalls in ihren Grundzügen dargestellt. gr. 8°. (VII, 176 S.) Freiburg, Mohr. 3 Mk.

Lehrbücher.

Bork, H., P. Crantz, E. Haentzschel, mathematischer Leitfaden für Realschulen. 1. Tl.: Planimetrie u. Arithmetik. gr. 8°. (184 S. m. Fig.) Leipzig, Dürr'sche B. 1,80 Mk.

Haller v. Hallerstein, F. Baron, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Nach dem Lehrplane für das kgl. preuss. Kadettenkorps bearb. v. Bruno Hülsen. 1. Tl. Pensum der Quarta u. Unter-Tertia. 6. Aufl. gr. 8°. (VI, 187 S. m. Fig.) Berlin, Nauck & Co. Geb. 2,80 Mk.

Meisel, F., Leitfaden für den geometrischen Unterricht an niederen u. mittleren gewerblichen Lehranstalten. gr. 8°. (IV, 28 S.) Darmstadt, Bergsträsser. 40 Pf.

Vogel, J. G., Hilfs- u. Wiederholungsbuch für den Unterricht in der astronomischen Geographie an mittleren Lehranstalten. gr. 8°. (VI, 71 S. m. Fig.) Leipzig, Deichert. 1,40 Mk.

Sammlungen.

Bachmann, F. u. Rich. Kanning, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. 7 Hfte. gr. 8°. Leipzig, Freytag. Geb. 5,70 Mk.

Baur, Ludw., Rechenbuch i. Aufgaben u. Auflösungen f. Lehrer u. Lehramtszöglinge, sowie zum Selbststudium. 2. Aufl. gr. 8°. (VI, 266 S.) Stuttgart, Steinkopf. 3,20 Mk.

Frank, F. u. H. Martens, Rechenbuch für Gewerbe- u. Bauschulen, sowie für gewerbliche Fortbildungsschulen. 2. Aufl. gr. 8°. (VI, 161 S. m. 52 Fig.) Dresden, Kühtmann 2,40 Mk.

Gajdeczka, Jos., Maturitäts-Prüfungs-Fragen aus der Physik. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 194 S. m. Fig.) Wien, Deuticke. 2 Mk.

Hartmann, Berthold, Rechenbuch f. höhere u. mittlere Mädchenschulen. 3. Hft. Für das 5. u 6. Schuljahr. gr. 8°. (IV, 96 S.) Frankfurt a/M., Kesselring. Kart. 50 Pf.

Heinze u. Hübner, Rechenbuch für Volksschulen u. die unteren Klassen höherer Lehranstalten. Ausg. C. in 7 Heften. 2. u. 3. Hft. gr. 8°. Breslau, Görlich. 45 Pf.

Költzsch, A., Rechenbuch f. Volks- u. Mittelschulen in 8 Heften. 1.–7. Hft. gr. 8°. Leipzig, Merseburger. 1,52 Mk.

— dasselbe. Ergebnisse u. methodische Bemerkungen dazu. 3.—7. Hft. gr. 8°. Ebd. 1,60 Mk.

Königbauer, Joach., geometrische Aufgaben für Mittelschulen u. Lehrerbildungsanstalten. 4. Aufl. gr. 8°. (33 S.) Regensburg, Habbel. 80 Pf.

Löser, J., kleines Rechenbuch für Landwirtschafts- u ländliche Fortbildungsschulen. gr. 8°. (IV, 108 S. m. 70 Abbild.) Stuttgart, Ulmer. Kart. 1,20 Mk.

— , u. H. Zeeb, Rechenbuch nebst populärer Geometrie, Physik, Mechanik u. Landwirtschaftslehre mit vielen Aufgaben. 7. Aufl. Unter Mitwirkung v. R. Seifert. gr. 8°. (XVI, 367 S. m. 160 Holzschn.) Ebd. 2,80 Mk.; Resultate (76 S. m. 7 Holzschn.) 1,30 Mk.

Lindau, Frdr., Max Berbig u. Ernst Schmidt, Aufgabensammlung f. d. Unterricht im Kopfrechnen. gr. 8°. (100 S.) Wiesbaden, Behrend. Kart. 2 Mk.

Matthiessen, Ludw., Uebungsbuch f. d. Unterricht in der Arithmetik u. Algebra. Nach der Aufgabensammlung v. Heis bearb. 4. Aufl. gr. 8°. (VII, 253 S.) Köln, Du Mont-Schauberg. 2 Mk.

Maurer, Aug., Maxima und Minima. Aufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. gr. 8°. (V, 50 S. m. 13 Fig.) Berlin, Springer. Kart. 1,40 Mk.

Rosenberg, Karl, methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Planimetrie u. Stereometrie für Lehrer- u. Lehrerinnen-Bildungsanstalten, sowie für andere gleichgestellte Lehranstalten. gr. 8°. (III, 159 S. m. 107 Fig.) Wien, Hölder. Geb. 1,90 Mk.

Seeländer, Frdr., Rechenbuch für kaufmännische, gewerbliche u. hauswirtschaftliche Mädchen-Fortbildungsschulen in Bei-

spielen u. Aufgaben 2. Hft. gr. 8°. (95 S.) Leipzig, Dürr'sche B. 1,20 Mk.

Utescher, Otto, Rechenaufgaben für höhere Schulen. In 3 Heften, nach den preuss. Lehrplänen v. 1892 bearb. 2. Aufl. gr. 8°. Breslau, Hirt. 1,10 Mk.

Tabellen.

Arnold, E., Constructionstafeln für den Dynamobau. 1. Tl. Gleichstrom-Maschinen. qu.-gr. Fol. (55 Taf. m. 1 Bl. Text.) Stuttgart, Enke. In Mappe 20 Mk.

Becker, E., logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf 5 Decimalen. 2. Ausg. Lex. 8°. (XVI, 104 S.) Leipzig, Tauchnitz. 1,20 Mk.

Fulst, Otto, nautische Tafeln. Mit 1 Schalttafel als Beilage. 8°. (IV, 154 u. 4 S.) Bremen, Heinsius. 3,50 Mk.

Gezeitentafeln f. d. Jahr 1898. Hrsg. v. Reichsmarine-Amt. Red.: Observatorium zu Wilhelmshaven. Mit 14 Blättern in Steindruck, enth. Darstellungen der Gezeitenströmungen in der Nordsee, im Engl. Kanal u. der Irischen See. 8°. (XII, 265 S.) Berlin, Mittler. 1,50 Mk.

Matthies, E., nautische Tafeln für Nord- u. Ostsee. gr. 8°. (III, 72 S.) Emden, Haynel. Geb. 2,50 Mk.

Produktentafel, kleine, hrsg. v. der trigonometrischen Abtheilung der kgl. preuss. Landesaufnahme. gr. 8°. (4 S.) Berlin, Mittler. 15 Pf.

Spitzer, Sim., Tabellen f. die Zinses-Zinsen- u. Renten-Rechnung mit Anwendung derselben auf Berechnung von Anlehen, Construction von Amortisationsplänen etc. 4. Aufl. gr. 8°. (VIII, 513 S.) Wien, Gerold. 15 Mk.

Taschentafel, 4stellige logarithmische. Hrsg. v. d. trigonometrischen Abtheilung der kgl. preuss. Landesaufnahme. gr. 8°. 6 S) Berlin, Mittler. 30 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Behm, Max. u. Herm. Dageförde, die Praxis des kaufmänn. Rechnens zum Gebrauche für Schule u. Kontor. Hrsg. im Auftrag des Kuratoriums der kaufmänn. Fortbildungsschulen zu Berlin. Auflösungen f. den 1. bis 3. Thl. gr. 8°. (46 S.) Berlin, Spamer. 1,50 Mk.

Bigler, U., ein Beitrag zur Theorie der arithmetischen Reihen. 8°. (36 S.) Aarau, Sauerländer. 1 Mk.

Burkhardt, Heinr., funktionentheoretische Vorlesungen. 1. Tl. Auch unter d. Titel: Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen. Mit zahlreichen Figuren im Text. gr.8°. (XII, 213 S.) Leipzig, Veit & Co. 6 Mk.

Daublebsky v. Sterneck, R, über einen Satz der additiven Zahlentheorie. gr.8°. (8 S.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Diesener, H., die Arithmetik. Praktisches Unterrichtsbuch zur Erlernung der 4 Rechnungsarten mit ganzen Zahlen, gewöhnlichen Brüchen und Dezimalbrüchen etc. Mit einer grossen Zahl vollständig ausgerechneter praktischer Beispiele für den Selbstunterricht und zum Gebrauche an Gewerbe- u. Fortbildungsschulen. 2. Aufl. gr.8°. (IV, 64 S.) Halle, Hofstetter. 1,50 Mk.

Fricke, Rob., Hauptsätze der Differential- u. Integralrechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. 2. Thl. gr.8°. (VIII, 66 S. m. 15 Fig.) Braunschweig, Vieweg. 1,50 Mk.

Frischauf, Johs., Vorlesungen über Kreis- u. Kugel-Functionen-Reihen. gr.8°. (VI, 60 S) Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Fuchs, L, zur Theorie der Abel'schen Functionen. gr.8°. (14 S.) Berlin, Reimer. 50 Pf.

Goldschmidt, Ludw., die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik. gr.8°. (VII, 279 S.) Hamburg, Voss. 7 Mk.

Hochstein, A., Arithmetik u. Algebra. 1. Hft.: Lehrsätze u. Uebungsstoff für die Untertertia. Zunächst für Rektoratsschulen bearb. gr.8°. (56 S.) Lippstadt, Harlinghausen. 60 Pf.

Isenkrahe, C., das Verfahren der Funktionswiederholung, seine geometrische Veranschaulichung u. algebraische Anwendung. gr.8°. (113 S. m. 79 Fig.) Leipzig, Teubner. 2,80 Mk.

Puchberger, Eman., eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. V. (Suppl.-)Hft. gr.8°. (30 S.) Wien, Gerold. 1,60 Mk.

Rogel, Frz., die Entwicklung nach Bernoulli'schen Functionen. gr.8°. (48 S.) Prag, Rivnáč. 72 Pf.

—, Note zur Entwicklung nach Euler'schen Functionen. gr.8°. (9 S.) Ebd. 20 Pf.

Schüller, Werner Jos., ausführliches Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra für höhere Schulen u. Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterr. 2. um die Logarithmen verm. Ausg. gr 8°. (XXV, 478 S. m. 54 Fig.) Leipzig, Teubner. 2,50 Mk.

Servus, H., Regeln der Arithmetik u. Algebra zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. 2. Tl.: Ober-Sekunda u. Prima. gr.8°. (III, 235 S.) Berlin, Salle. 2,40 Mk.

Studnička, F. J., Beitrag zur Theorie der Potenz- u. Kombinations-Determinanten. gr 8°. (20 S.) Prag, Rináč. 24 Pf.

Weltzien, Carl, Ueber Produkte u. Potenzen von Determinanten. 4°. (23 S.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Geometrie.

Augschun, W., Grundzüge der Geometrie m. geometr. Konstruktions- u. Rechenaufgaben. 2. Aufl. Mit 4 Steindrucktaf. u. Abbild. i. Text. 8°. (VIII, 125 S.) Berlin, Mittler. Kart. 1,50 Mk.

Böger, R., die Geometrie der Lage in der Schule. gr. 8°. (47 S. m. Fig.) Hamburg, Herold. 2,50 Mk.

Bosse, L., u. H. Müller, Stereometrie für Landwirtschaftsschulen. 8°. (IV, 40 S. m. 30 Abbild.) Berlin, Parey. 50 Pf.

Falcke, A., Leitfaden der Geometrie. 18. Aufl. Neu bearb. v. H. Röhrs. gr. 8°. (IV, 102 S. m. 215 Fig.) Berlin, Rentel. Kart. 80 Pf.

Fenkner, Hugo, Lehrbuch d. Geometrie f. d. mathemat. Unterricht an höheren Lehranstalten. (In 2 Tln.) 1. Tl.: Ebene Geometrie. 3. Aufl. gr. 8°. (VIII, 208 S. m. Fig.) Berlin, Salle. 2 Mk.

Gauter, H., u. F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. 1. Tl. Die analytische Geometrie der Ebene. 3. Aufl. gr. 8°. (VII, 176 S. mit 54 Fig.) Leipzig, Teubner. 2,40 Mk.

Jetter, die geometrischen Oerter mit besonderer Berücksichtigung von Spiekers Lehrbuch u. Benützung anderer Quellen zusammengestellt. 2. Aufl. 8°. (12 S.) Blaubeuren, Mangold. 20 Pf.

Kleinschmidt, Emerich, Leitfaden der Geometrie u. des geometrischen Zeichnens f. Mädchen-Bürgerschulen. 2. Thl. (II. Classe.) 2. Aufl. gr. 8°. (III, 60 S. m. 60 Abbildgn. u. 2 Taf.) Wien, Hölder. Geb. 92 Pf.

Küpper, Karl, die ultraelliptischen Curven C^n_p, $p > 1$. gr. 8° (11 S.) Prag, Rivnáč. 20 Pf.

Loria, Gino, i poligoni di Steiner nelle cubiche razionali. Aggiunte ad una memoria di Em. Weyr. gr. 8°. (4 S.) Ebd. 10 Pf.

Richter, Otto, die Berührungskegelschnitte der ebenen Kurven 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten. Progr. 4°. (20 S. m. 2 Taf.) Leipzig, Hinrichs' Sort. 1,20 Mk.

Schwering, Karl u. Wilh. Krimphoff, Anfangsgründe der ebenen Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearb. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 133 S. m. 151 Fig.) Freiburg, Herder. 1,80 Mk.

Spieker, Th., Lehrbuch der Stereometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Mit in den Text gedr. Holzschn. 2. Aufl. gr. 8°. (IV, 108 S.) Potsdam, Stein. 1,60 Mk.

Tobel,, Edw. v., Geometrie für Sekundarschulen. 8⁰. (126 S.) Zürich, Orell, Füssli. Kart. 1,30 Mk.

Zwicky, M., Grundriss der Planimetrie u. Stereometrie, nebst Uebungsaufgaben. 1. Tl.: Planimetrie. 2. Aufl. 8⁰. (V, 94 S. m. Fig.) Bern, Schmid & Francke. Kart. 1,50 Mk.

Trigonometrie.

Kambly u. Röder, Trigonometrie. Vollständig nach den preuss. Lehrplänen v. 1892 bearb. Ausg. der Trigonometrie v. Kambly. Lehraufgabe der Ober-Sekunda und der Prima. Unter Voranstellung der planimetrischen Lehraufgabe der Ober-Sekunda. 2. Aufl. (25. der Kambly'schen Trigonometrie.) gr. 8⁰. (189 S. m. Fig.) Breslau, Hirt. Geb. 2 Mk

Wotruba, R., Einleitung in die Trigonometrie. Für techn. Lehranstalten u. zum Selbstunterrichte. gr. 8⁰. (V, 55 S. m. 4 lith. Taf.) Altenburg, Bonde. 1,70 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Ergebnisse der Triangulation der Schweiz. Hrsg. durch das eidgen. topograph. Bureau. 2. u. 3. Lfg. (2. Kanton Zürich. — 3. Cantone Ticino.) gr. 4⁰. Bern, Schmid & Francke. à 4 Mk.

Jordan, W, Handbuch der Vermessungskunde. 2. Bd. Feld- u. Landmessung. 5. Aufl. (In 2 Lfgn.) 1. Lfg. gr. 8⁰. (416 S. m. Fig.) Stuttgart, Metzler. 8 Mk.

Nivellements-Ergebnisse, die, der trigonometrischen Abtheilung der kgl. preuss. Landesaufnahme. 4. 5. u. 8. Hft. — 4. Schleswig-Holstein u. die Grossherzogthümer Mecklenburg. — 5. Schlesien. — 6. Prov. Sachsen u. d. Thüringischen Länder. 12⁰. Berlin, Mittler. Kart. à 1 Mk.

Schmidt, v., die trigonometrischen Vorarbeiten für die topographische Messtisch-Aufnahme in Preussen. 8⁰. (41 S.) Ebd. Kart. 50 Pf.

Schubert, Formulare zu Vermessungs-Uebungen. 8⁰. (48 S.) Neudamm, Neumann. 80 Pf.

Trabert, Wilh, Höhenmessung mittels des Barometers. gr. 8⁰. (8 S.) Znaim, Fournier & Haberler. 20 Pf.

Weixler, Adolph, Ausgleichung trigonometrischer Messungen nach der Methode der geometrischen Oerter. gr. 8⁰. (57 S. m. 2 Taf.) Wien, Lechner. 1 Mk.

Mechanik.

Meissner, G., die Hydraulik u. die hydraulischen Motoren. 2. Aufl. v. H. Hederich u. Nowack. 18.—22. Lfg. gr. 8°. Jena, Costenoble. à 3 Mk.

Schmid, Carl, Statik u. Festigkeitslehre. Lehrheft nebst vielen Beispielen, elementar bearb. für den Gebrauch an der Schule u. in der Praxis. 2. Aufl. 4°. (VIII, 102 S. m. Abbild. u. 2 Taf.) Stuttgart, Metzler. 4 Mk.

Technik.

Bach, C., die Maschinen-Elemente. Ihre Berechnung u. Konstruktion mit Rücksicht auf die neueren Versuche. 6. Aufl. 2 Bde. Mit in den Text gedr. Abbildgn., 3 Texttaf. m. 54 Taf. Zeichngn. Lex.-8°. (XVIII, 702 u. 29 S.) Stuttgart, Bergsträsser. 30 Mk.

Bibliothek, polytechnische. 1. Bd.: Weiler, W., die Dynamomaschine. Physikalische Prinzipien, Arten, Teile, Wechselwirkung der Teile u. Konstruktion derselben. 3. Aufl. gr. 8°. (XVI, 199 S. m. 190 Fig.) Magdeburg, Faber. 4 Mk.

Biscan, Wilh., die elektrischen Messinstrumente. Die wissenschaftl. Messinstrumente u. Messbehelfe. gr. 8°. (IV, 102 S. m. 98 Abbildgn.) Leipzig, Leiner. 3 Mk.

Eder, Jos. Maria, ausführliches Handbuch der Photographie. 8. Hft.: Das Bromsilber-Collodion, sowie das orthochromatische Collodion Verfahren u. das Bad-Collodion-Trockenverfahren. 2. Aufl. gr. 8°. (X, VIII u. S. 365—595 m. 104 Holzschn.) Halle, Knapp. 2 Mk.

Erhard, Thdr., Einführung in die Elektrotechnik. Die Erzeugung starker elektr. Ströme u. ihre Anwendung zur Kraftübertragung. gr. 8°. (VI, 183 S. m. 95 Fig.) Leipzig, Barth. 4 Mk.

Hochenegg, C., Anordnung u. Bemessung elektr. Leitungen. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 214 S. m. 12 Fig.) Berlin, Springer. Geb. 6 Mk.

Holzmüller, Gust., die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. 1. Tl., enth. die statischen Momente u. Schwerpunktslagen, die Trägheits- u. Centrifugal-Momente für die wichtigsten Querschnittsformen u. Körper der techn. Mechanik in rechn. u. graph. Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land u. Reye. Mit 287 Fig. u. zahlreichen Uebungsaufgaben. gr. 8°. (XI, 340 S.) Leipzig, Teubner. Geb. 5 Mk.

Holzt, A., Elektrotechniker. 22. u. 23. Hft. Leipzig, Schäfer. à 75 Pf.

Jenisch, P., Haustelegraphie. Eine gemeinverständliche Anleitung zum Bau von elektrischen Haustelegraphen-, Telephon- u. Blitzableiter-Anlagen. gr.8⁰. (VII, 233 S. m. 312 Abbildgn.) Berlin, Rockenstein. 3 Mk.

Kapp, Gisbert, Dynamomaschinen für Gleich- u. Wechselstrom u. Transformatoren. Deutsch v. L. Holborn u. K. Kahle. 2.. Aufl. gr.8⁰. (VIII, 374 S. m. 165 Fig.) Berlin, Springer. Geb. 8 Mk.

Keck, Wilh., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- u. Maschinenwesen. II. Thl.: Mechanik elastisch-fester u. flüssiger Körper. gr.8⁰. (VIII, 367 S. m. 364 Holzschn.) Hannover, Helwing 12 Mk.

Lueger's, O., Lexikon der Technik. 22.—24. Abtlg. Stuttgart, Deutsche Verlagsanst. à 5 Mk.

Meissner, Geo., die Kraftübertragung auf weite Entfernungen u. die Konstruktion der Triebwerke u. Regulatoren. 2. Aufl. v. Jos. Krämer. 1. Lfg. gr.8⁰. (64 S. m. 5 Taf.) Jena, Costenoble. 3 Mk.

Parseval, A. v., der Drachen-Ballon. gr.8⁰. (32 S. m. Fig.) Berlin, Mayer & Müller. 1,50 Mk.

Rummer v. Rummershof, Adf., die Photogrammetrie im Dienste der Militär-Mappierung. gr.8⁰. (32 S. m. 9 Fig.) Wien, Lechner. 1 Mk.

Sammlung elektrotechnischer Vorträge. Hrsg. v. Ernst Voit. 1. Bd. 3. Hft. Feussner, K., die Ziele der neueren elektrotechnischen Arbeiten der physikalisch-technischen Reichsanstalt. gr. 8⁰)S. 115—149 m. 9 Abbild.) Stuttgart, Enke. 1 Mk.

Schulte, A., Wirkungsweise des Wassers im Laufrade der Tur binen. gr.4⁰. (16 S. m. 10 Fig.) Berlin, Siemens. 80 Pf.

Thaa, Geo. v., Anleitung zum Gebrauche des logarithmischen Rechenschiebers f. die Zwecke des Technikers. 8⁰. (59 S. m. Fig.) Wien, Hof- u. Staatsdruckere . 80 Pf.

Thompson, Silvanus P., die dynamoelektrischen Maschinen. 5. Aufl. Uebers. v. C. Grawinkel. Nach dem Tode des Uebersetzers besorgt v. K. Strecker u. F. Vesper. 2 Thle. gr.8⁰. (VII, IX, 790 S. m. 520 Abbild. u. 19 Taf.) Halle, Knapp. 24 Mk.

Weiler, W., der praktische Elektriker. Populäre Anleitung zur Selbstanfertigung elektrischer Apparate u. zur Anstellung zugehöriger Versuche, nebst Schlussfolgerungen, Regeln und Gesetzen. 3. Aufl. 8⁰. (XXXII, 614 S. m. 466 Fig) Leipzig, Schäfer. 8 Mk.

Wietz, Hugo, die isolierten elektrischen Leitungsdrähte u. Kabel. Ihre Erzeugung, Verlegung u. Unterhaltung. Dargestellt u. durch 159 in den Text gedr. Fig. erläutert. gr. 8⁰. (VIII, 236 S.) Leipzig, Leiner. 7 Mk

Optik, Akustik und Elasticität.

Kerber, Arthur, Beiträge zur Dioptrik. 3. Hft. gr. 8°. (16 S.) Leipzig, Fock. 50 Pf.

Röntgen, W. C., weitere Beobachtungen über die Eigenschaften der X-Strahlen. gr. 8°. (17 S. m. 1 Fig.) Berlin, Reimer. 1 Mk.

Tyndall, John, der Schall. Nach der 6. engl. Aufl. des Originals bearb. v. A. v. Helmholtz u. Cl. Wiedemann. 3. Aufl. gr. 8°. (XXII, 548 S. m. 204 Holzst.) Braunschweig, Vieweg. 10 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Annalen der schweizerischen meteorologischen Central-Anstalt 1894. „Der schweizerischen meteorologischen Beobachtungen" 31. Jahrg. gr. 4°. Zürich, Fäsi u. Beer. 18 Mk

Beobachtungen des Tiflisser physikalischen Observatoriums i. J. 1895. (Russisch u. deutsch.) gr. 4°. (IV, XXIX, 198 S,) Petersburg, Eggers. 10 Mk.

Brenner, Leo, Jupiter-Beobachtungen an der Manora-Sternwarte 1895—1896. gr. 4°. (24 S. m. 8 Farbendr. u. 8 Pausen.) Wien, Gerold. 7,60 Mk.

Catalog der astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördlicher u. 2° südlicher Declination für das Aequinoctium 1875. 9. Stück: Graham, A. Catalogue of 14464 stars between 24° 15′ and 30° 57′ of north declination 1855 for the epoch 1875 from observations made according to the programme of the Astronomische Gesellschaft at the university observatory Cambridges, England during the years 1872 to 1896. gr. 4°. (X, 308 S.) Leipzig, Engelmann. 26 Mk.

Falb's, Rud., neue Wetter-Prognose u. Kalender der kritischen Tage f. 1897 Juli-Dez. 16°. (82 S.) Berlin, Steinitz. 1 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie. 9. Lfg. Breslau, Trewendt. 3,60 Mk.

Hartl, Heinr., meteorologische u. magnetische Beobachtungen in Griechenland. 2. Bericht. gr. 8°. (32 S. m. Fig. u. 1 Taf.) Wien, Lechner's Sort. 1 Mk.

Heinrich, Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen, angestellt auf der landwirtschaftlichen Versuchsstation zu Rostock i. J. 1896. gr. 8°. (2 Tab. u 1 Taf) Güstrow, Opitz & Co. 50 Pf.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches. Jahrg. 1895. Meteorologische Beobachtungen in Württemberg i. J. 1895. Mitteilungen der mit dem kgl. statistischen Landesamt verbundenen meteorologischen Zentralstation. Bearb. v. L. Meyer unter Mitwirk. v.

Mack. Mit 7 Uebersichtskarten. gr. 4°. (94 S.) Stuttgart, Metzler. 4,50 Mk.

Jahres-Bericht des Centralbureaus f. Meteorologie u. Hydrographie i. Grossherzogth. Baden, mit den Ergebnissen der meteorologischen Beobachtungen u. Wasserstandsaufzeichnungen am Rhein u. seinen grösseren Nebenflüssen f. d. J. 1896. Mit e. Anh. betr. die Hochwasserkatastrophe v. März 1896. gr. 4°. (IV. 117 S. m. 11 Taf.) Karlsruhe, Braun. 6 Mk.

—, 5., des Sonnblick-Vereins f. d. J. 1896. Lex.-8°. (40 S. m. 2 Abbild. u. 3 Taf.) Wien, Gerold. 3 Mk.

Ledóchowski, Jos., Graf, Wetterprognose, giltig für Niederösterreich, Theile v. Oberösterreich, Süd Mähren u. Westungarn für d. Monat Mai 1897. 12°. (1 Bl.) Wien, Braumüller. 20 Pf.

Lemke, H., über die Mars- u. Jupiter-Störungen des kleinen Planeten vom Hebe-Typus. 4°. (37 S.) Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk.

Müller, G., die Photometrie der Gestirne. gr. 8°. (X, 556 S. m. 81 Fig.) Leipzig, Engelmann. 20 Mk.

Pernter, J. M., die Farben des Regenbogens u. der weisse Regenbogen. gr. 8°. (101 S. m. 3 Steintaf.) Wien, Gerold. 2 Mk.

Publikationen der astronomischen Gesellschaft. XXI. Gylden, Hugo, Hülfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in den absoluten Bewegungstheorien der kleinen Planeten. Unter Mitwirkung v. S. Oppenheim hrsg. gr. 4°. (LIII, 242 S.) Leipzig, Engelmann. 30 Mk.

— des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 35. (XI. Bd., 2. Stück.) Scheiner, J., Ausmessung des Orionnebels nach physikalischen Aufnahmen. gr. 4°. (68 S. m. 2 Photograv.) Ebd. 4 Mk.

Scheiner, J., die Photographie der Gestirne. Mit 1 Taf. u. 52 Fig. i. Text. gr. 8°. (V, 382 S.) Nebst e. Atlas v. 11 Taf. mit textl. Erläuterungen. 4°. (6 S.) Ebd. 21 Mk.

Servus, Herm., Neue Grundlagen der Meteorologie. 4°. (24 S.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Sinram, A., Fragmente zum kosmischen Bewegungsgesetz (Incitations-Theorie) u. zur Mechanik des Himmels. gr. 8°. (32 S.) Hamburg, Gräfe & Sillem. 1 Mk.

Stechert, Carl, Tafeln für die Vorausberechnung der Sternbedeckungen. Mit 2 im Text gegeb. Fig. u. 1 Diagramm in 2 Expln. gr 4°. (II, 43 S.) Hamburg, Friederichsen. 6 Mk.

Veröffentlichungen des kgl. preuss. meteorologischen Instituts. Hrsg. durch Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der magnet. Beobachtungen in Potsdam i. J. 1894. 2. Hft. gr. 4°. (44 S. m. 4 Taf.) Berlin, Asher. 3,50 Mk.

Veröffentlichungen des kgl. preuss. meteorologischen Instituts. Hrsg. durch Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der magnet. Beobachtungen in Potsdam i. J. 1895. 2. Hft. gr. 4⁰. (43 S. m. 4 Taf.) Berlin, Asher. 3,50 Mk.

— dasselbe. Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen i. J. 1894. gr. 4⁰. (XL, 206 S. m. 2 Karten.) Ebd. 10 Mk.

— dasselbe. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordng. i. J. 1896, zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1896. Beobachtungssystem des Königreich Preussen u. benachbarter Staaten. 2. Hft. gr. 4⁰. (S. 57—110.) Ebd. 3 Mk.

— dasselbe. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam i. J. 1895. gr. 4⁰. (XII, 119 S. m. 4 Fig.) Ebd. 8 Mk.

Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft. 31. Jahrg. 4. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Nautik.

Segelhandbuch für den Stillen Ozean. Mit e. Atlas v. 31 Karten. Hrsg. v. d. Direktion der deutschen Seewarte. Mit 32 in den Text gedr. Figuren u. 9 Steindr. Taf. Lex.-8⁰. (XII, 916 S.) Hamburg. Friederichsen. Geb. 36 Mk.

Physik.

Abhandlungen, physikalische, der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1896. gr. 4⁰. (27, 36 u. 66 S. m. 6 Taf.) Berlin, G. Reimer. Kart. 9,50 Mk.

Albrecht, Gust., die Elektricität. 8⁰. (167 S. m. 38 Abbild.) Heilbronn, Schröder & Co. Geb. 2 Mk.

Bezold, Wilh. v., zur Theorie des Erdmagnetismus. gr. 8⁰. (36 S. m 2 Fig. u. 2 Taf.) Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

Cellier, Léon, Leitungsvermögen der schwarzen Kohle für Wärme u. Electricität. Diss. gr. 8⁰. (132 S.) Zürich, Speidel. 3 Mk.

Cohn, Emil, elektrische Ströme, 10 Vorträge über die physikalischen Grundlagen der Starkstrom-Technik. gr. 8⁰. (IV, 182 S. m. 70 Abbild.) Leipzig, Hirzel. 3,60 Mk.

Donle, Wilh., Lehrbuch der Experimentalphysik für Realschulen u Realgymnasien, nach den minist. Lehrplänen bearb. Ausg. A. Mit 173 in den Text gedruckten Abbildungen u. 525 Uebungsaufgaben. gr. 8⁰. (VIII, 268 S.) München, Wolff. Geb. 3 Mk.

Ebert, H., magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus u. der Induktion, dargestellt auf Grund des Kraftlinien-Begriffes. 2. Tl. Mit 47 Abbild. im Text u. auf einer Tafel. gr. 8°. (XVIII u. S. 225—499.) Leipzig, Barth. 10 Mk.

Götz, Hans, Leitfaden der Physik. Zum Gebrauch an humanistischen Anstalten. Mit 180 in den Text gedr. Figuren u. zahlreichen Uebungsaufgaben. gr. 8°. (VIII, 245 S.) München, Franz. 2,80 Mk.

Hellmann, G., die Anfänge der magnetischen Beobachtungen Lex.-8°. (27 S. m. 3 Fig.) Berlin, Kühl. 1,50 Mk.

Klemenčič, Ign., Ueber magnetische Nachwirkung. gr. 8° (18 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. 9. Aufl. v. Leop. Pfaundler unter Mitwirkung v. Otto Lummer. (In 3 Bdn.) Mit gegen 2000 Holzst. u. Taf. 2. Bd. 1. Abth. 3. Lfg. gr. 8°. (XX u. S. 609—1192.) Braunschweig, Vieweg. 9,50 Mk.

Planck, Max, Vorlesungen über Thermodynamik; gr. 8°. (VII, 248 S. m. 5 Fig.) Leipzig, Veit. Kart. 7,50 Mk.

Wallentin, Ign. G., Lehrbuch der Elektricität u. des Magnetismus. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen über elektrische Energieverhältnisse u. unter Darstellung der den Anwendungen in der Elektrotechnik zugrunde liegenden Principien gr. 8°. (VIII, 394 S. m. 230 Holzschn.) Stuttgart, Enke. 8 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher. LXXI. Bd. gr. 4°. Leipzig, Engelmann. — Nr. 1. Braunmühl, A. v., Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie. (30 S m. 1 Taf.) 1,50 Mk. — Nr. 3. Kutta, W. M., zur Geschichte der Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung. (33 S. m. 3 Taf.) 2,50 Mk.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Hrsg. v. Roland Baron Eötvös, Jul. König, Carl v. Than. Red. v. J. Fröhlich. 13. Bd. 2. Hlfte. gr. 8°. (IV u. S. 193—464 m. Abbild.) Budapest, Akademie d. Wissensch. 4 Mk.

— der sächs. Gesellsch. d Wissenschaften. Math.-physik. Classe. 1897. I. u. II. Hft. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Bibliothek, internationale wissenschaftliche. 59. Bd. Mach, Ernst, die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt. 3. Aufl. 8°. (XII, 505 S. m. 250 Abbild.) Leipzig, Brockhaus. 8 Mk.

Bibliothek', photographische. (Sammlung kleinerer photograph. Hilfsbücher.) Nr. 5—7. gr. 8°. Berlin, G. Schmidt. — 5. Schultz-Hencke, D., Anleitung zur photographischen Retouche u. zum Uebermalen v. Photographien. 3. Aufl. v. Kopske's Anleitg. zum Retouchieren. Mit 2 Lichtdr.-Taf. u. 21 Fig. im Text. (VIII, 121 S.) 2,50 Mk. — 6. Parzer-Mühlbacher, Alfr., photographische Aufnahme u. Projektion m. Röntgenstrahlen mittels der Influenz-Elektrisirmaschine Eine Anleitg. f. die Praxis. Mit 10 Taf. nach Orig.-Aufnahmen des Verf. u. 15 Fig. im Text. (V, 47 S.) 1,80 Mk. — 7. Hanneke, Paul, das Celloidinpapier, seine Herstellung u. Verarbeitung. Mit besond. Berücksicht. der Anfertig. v. Mattpapieren sowie des Platintonprozesses. Mit 15 Fig. im Text. (VII, 131 S.) 3 Mk.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 4. Bd. 1894—95. gr. 8°. (V, XVIII, 546 S.) Berlin, G. Reimer. 16 Mk.

— dass. 5. Bd. 1896. 1. Hft. gr. 8°. (94 S.) Leipzig, Teubner. 2,80 Mk.

Nachrichten v. der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikal. Klasse, nebst geschäftl. Mitteilgn. 1897. Lex.-8°. Göttingen, Horstmann. 5 Mk.

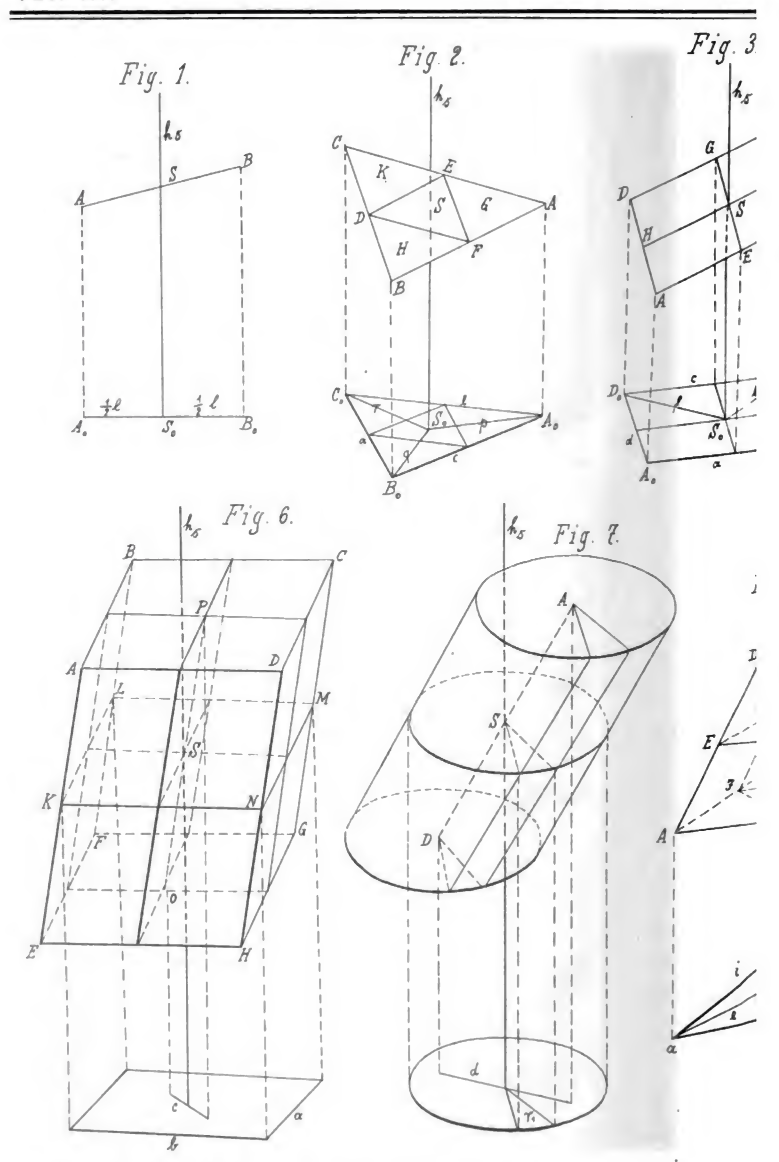
Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 86. u. 87. Leipzig, Engelmann. Kart. — 86. Faraday, Mich., Experimentaluntersuchungen über Elektricität. (Aus den Philosoph. Transact.) Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. III.—V. Reihe. 1833. (104 S. m. 15 Fig.) 1,60 Mk. — 87. Dasselbe. VI.—VIII. Reihe. 1834. (180 S. m. 48 Fig.) 2,60 Mk.

Sitzungsberichte, Münchener. Math. Classe. 1896. IV. Hft. München, Franz. 1,20 Mk.

—, Wiener. Mathem.-naturw. Classe. Wien, Gerold. 1. Abth. 105. Bd. 8.—10. Hft. 5 Mk. — Abth. IIa. 105. Bd. 8.—10. Hft. 7 Mk. — Abth. IIb. 105. Bd. 8.—10. Hft. 1,60 Mk. — Abth. III. 105. Bd. 8.—10. Hft. 3 Mk.

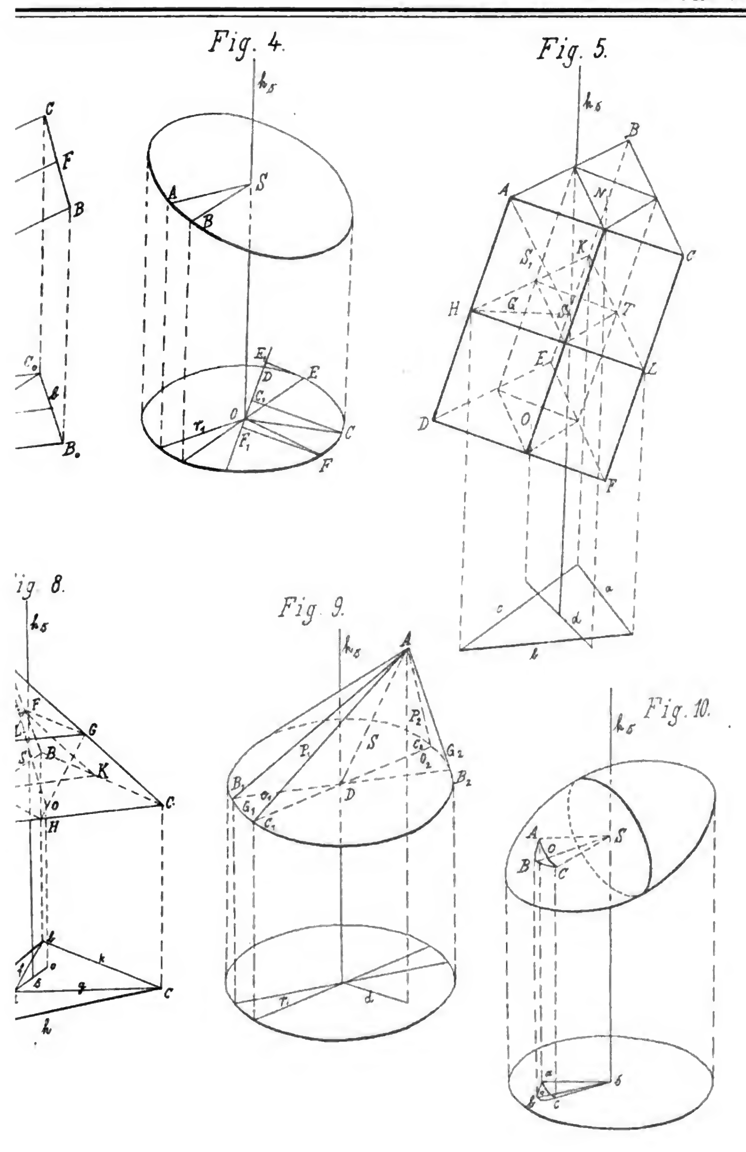
Verhandlungen der v. 15.—21. X 1896 in Lausanne abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung. Red. v. A. Hirsch. Zugleich mit den Berichten über die Fortschritte der Erdmessung in den einzelnen Ländern während des letzten Jahres. (Deutsch u. französ.). gr. 4°. (318 S. m. Fig. u. 13 Taf. u. Karten.) Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

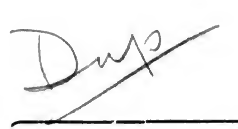
Teil XV.



II. Rehfeld: Trägheitsmomente.

Taf. II.





ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Sechzehnter Teil. Zweites Heft.

(Mit 3 lithographirten Tafeln.)

Leipzig und Dresden.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
(H. Ehlers & Co.)

1898.

V.

Ein Beitrag zu den Beziehungen des Umkreises zu den Berührungskreisen eines Dreieckes.

Von

Konstantin Karamata.

Betrachtet man den Umkreis eines Dreieckes ABC als Erzeugniss zweier congruenten Strahlenbüschel, so kann man etwa die Seiten AC und CB als ein Paar zweier einander eindeutig zugeordneten Strahlen annehmen. Derselbe Kreis ist dann durch die Gleichungen

$$x+y = 180^0 - \mu \tag{1}$$

oder

$$x+y = \mu \tag{2}$$

charakterisirt, wo x und y die veränderlichen Winkel der Dreiecke bedeuten, die durch die Zuordnung der Strahlen entstehen, und welche an dem gemeinschaftlichen Strahle AB liegen, μ ist der dritte Winkel, welcher als Peripheriewinkel, des Kreises immer constant bleibt. Die erste Gleichung bezieht sich auf den Kreisbogen oberhalb der Sehne AB und die zweite auf den Kreisbogen unterhalb derselben Sehne. Der Radius dieses Kreises ist

$$r = \frac{a}{2\sin\mu} \tag{3}$$

wo a die Länge der gemeinschaftlichen Seite AB ist.

2. Hälften wir sowol die inneren als auch die äusseren Winkel an der allen Dreiecken des Umkreises gemeinschaftlichen Seite AB, so geben die Durchschnitte je vierer zu einem Dreiecke gehörigen Symmetralen die Mittelpunkte der vier Berührungskreise, so dass die Frage nach dem geometrischen Orte dieser Mittelpunkte entsteht. Je zwei Symmetralen, die zu einem Innen- und dessen Aussenwinkel gehören, bilden zwei involutorisch zugeordnete Strahlen, die auf einander senkrecht stehen, wodurch wir zwei involutorische und congruente Strahlenbüschel mit dem Scheitel in A und B erhalten. Die eindeutige Zuordnung je eines Paares involutorischer Strahlen des einen Strahlenbüschels (A) einem anderen Paare aus dem involutorischen Strahlenbüschel aus B bestimmt, schon die eindeutige Zuordnung der Strahlen aus dem ursprünglichen Strahlenbüschel (A) und (B), deren Erzeugniss der Umkreis selbst ist, dadurch dass je einen Strahl des ursprünglichen Strahlenbüschels ein Strahlenpaar des involutorischen Strahlenbüschels begleitet. Der geometrische Ort aller Mittelpunkte der vier Berührungskreise aller Dreiecke, welche einem Umkreise eingeschrieben sind und eine Seite gemeinschaftlich haben, wird daher das Erzeugniss zweier involutorischen und congruenten Strahlenbüschel sein. Dasselbe ist im allgemeinen eine Curve 4. Ordnung, welche in diesem Falle, wie aus der folgenden Specialisirung hervorgeht, in zwei Kreise zerfällt.

3. Diese Curve können wir auf Grund der Gleichungen (1) und (2) untersuchen und werden daher die zwei Fälle, ob die Dreiecke oberhalb oder unterhalb der gemeinschaftlichen Seite in dem Umkreise liegen, unterscheiden.

I. Die Dreiecke oberhalb der gemeinschaftlichen Seite AB.

a) Die Symmetralen der inneren Winkel an der Seite AB schneiden sich im Punkte D, der ein Mittelpunkt eines Kreises, welcher alle drei Seiten eines Dreieckes von innen berührt. Der Winkel bei D ist gegeben durch $180^0 - \frac{x+y}{2}$ oder nach (1) durch

$$90^0 + \frac{\mu}{2}$$

Dies aber findet für jedes Dreieck, welches dem Kreise K einge-

schrieben ist und oberhalb AB liegt, statt, daher ist der geometrische Ort aller solcher Punkte D ein Kreisbogen AB mit dem constanten Peripheriewinkel $90^0 + \frac{\mu}{2}$ oberhalb der Sehne AB. Der Radius des Kreises, dem dieser Kreisbogen angehört, ist

$$\varrho_1 = \frac{a}{2 \cos \frac{\mu}{2}}$$

Den Mittelpunkt und den Centriwinkel dieses Kreises K erhält man, wenn man die Senkrechte SP verlängert, bis sie den Kreis K unterhalb der Sehne AB schneidet. Der Durchschnittspunkt S_c' giebt den Mittelpunkt des Kreises K_c' und

$$AS_c' = S_c'B$$

ist dessen Radius.

b) Es sei D_b'' der Schnittpunkt der Symmetrale des Aussenwinkels bei A mit der Symmetrale des Innenwinkels bei B, D_a dagegen der Schnittpunkt der Symmetrale des Innenwinkels bei A mit der Symmetrale des Aussenwinkels bei B, so geben dieselben die Mittelpunkte zweier Berührungskreise, welche eine der als Strahlen einander zugeordneten Seiten in ihrer Verlängerung, die andere aussen berühren. Der Winkel der Symmetralen bei D_b ist $180^0 - \left[\frac{180^0 - x}{2} + x + \frac{y}{2}\right]$ und der bei D_a ist $180^0 = \left[\frac{180^0 - y}{2} + y + \frac{y}{2}\right]$ oder nach (1)

$$\frac{\mu}{2}$$

d. h. der Ort aller D_a und D_b ist ein Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel $\frac{\mu}{2}$ oberhalb der Sehne AB, der zum Kreise K_c'' mit dem Radius

$$\varrho_2 = \frac{a}{2 \sin \frac{\mu}{2}}$$

gehört. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der zweite Durchschnittspunkt S_c'' der Senkrechten SP mit dem Kreise K.

c) Die Symmetralen beider Aussenwinkel an AB geben als Durchschnittspunkt den Mittelpunkt D_b des Kreises, welcher die

gemeinschaftliche Seite AB aussen berührt. Der Winkel bei D_c ist $180^0 - \left[\frac{180^0 - x}{2} + \frac{180^0 - y}{2}\right]$ oder nach (1)

$$90^0 - \frac{\mu}{2}$$

dies ist aber der Supplementwinkel von I. a. und constant, daher liegt D_c am Kreisbogen, welcher dem von I. a. zum Kreise K_e' ergänzt.

II. Die Dreiecke unterhalb der gemeinschaftlichen Seite AB.

a) Bezeichnet man mit D', analog nach I. a., die Mittelpunkte der Kreise, welche die Dreiecke, die unterhalb der Sehne AB liegen, innerlich berühren, so wird der Peripheriewinkel bei D' gegeben sein durch $180^0 - \left[\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right]$ und dies ist nach (2)

$$180^0 - \frac{\mu}{2}$$

Der Kreisbogen, an welchem die Scheitel der obigen Peripheriewinkel liegen, ist supplementär zu dem von I. b.

b) Für die Mittelpunkte D_b' und D_a' erhalten wir, dass sie an Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel $180^0 - \left[\frac{180^0 - x}{2} + x + \frac{y}{2}\right]$ beziehungsweise $180^0 - \left[\frac{180^0 - y}{2} + y + \frac{x}{2}\right]$ d. i. nach (1)

$$90^0 - \frac{\mu}{2}$$

liegen; daher ist das derselbe Kreisbogen wie I. c.

c) Die Mittelpunkte D_c sind Scheitel der Peripheriewinkel $180^0 - \left[\frac{180^0 - x}{2} + \frac{180^0 - y}{2}\right]$ oder nach (2)

$$\frac{\mu}{2}$$

d. h. der Kreisbogen I. b.

Man ersieht aus dem, dass auf dem Kreise K_c' die Mittelpunkte D_a, D_b, D_a' und D_b' und auf dem Kreise K_c'' D_a, D_b, D und D_c' liegen. Daraus folgt, dass der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Berührungskreise der einem Umkreise eingeschriebener Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Seite haben, zwei Kreise sind, als auch dass die Curve 4. Grades, welche als Erzeugniss zweier congruenten involutorischen Strahlenbüschel erscheint, in zwei Kreise zerfällt.

4. Ebenso wie die Punkte A und B des eingeschriebenen Dreieckes ABC als Scheitel zweier congruenten Strahlenbüschel angenommen worden sind, kann man auch B und C, als auch C und A als solche betrachten; dem gemäss sind im ersten Falle BC der gemeinsame Strahl, BA und AC die einander zugeordneten Strahlen, im zweiten Falle CA der gemeinschaftliche Strahl und CB und BA die zugeordneten. Im ersten Falle erhalten wir, dass die Mittelpunkte der Berührungskreise au den Kreisen K_a' und K_a'', im zweiten Falle auf den Kreisen K_b' und K_b'' liegen müssen, die man in Bezug auf die Seite BC resp. CA ebenso erhält, wie die Kreise K_c' und K_c'' in Bezug auf AB; daher werden K_a', K_a'', K_b' und K_b'' analoge geometrische Oerter repräsentiren wie die Kreise K_c' und K_c''.

Nun betrachten wir das Dreieck ABC mit seinem Umkreise K, dessen Mittelpunkt S ist, für sich und fällen aus S Senkrechte auf alle drei Seiten, so erhalten wir sechs Schnittpunkte auf dem Umkreise S_a', S_a'', S_b', S_b'', S_b' und S_c'', beschreiben aus diesen einzelnen Punkten als Mittelpunkten Kreise mit Radien, welche gleich dem Abstande des Mittelpunktes von den Endpunkten der Seite, in Bezug auf welche die dazugehörige Senkrechte die Symmetrale ist ($S_aB = S_aC$, $S_a'B = S_a'C$, $S_c'C = S_b'A$, $S_b''C = S_b''A$, $S_c^0A = S_c'B_c$ und $S_c'C = S_a''B$), so erhalten wir sechs Kreise K_a', K_a'', K_b', K_b'', K_c' und K_c'', von denen sich je vier in den drei Ecken des Dreieckes schneiden und je drei in vier anderen Punkten D, D_a, D_b und D_c, welche zugleich auch die Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Dreieckes sind.

Dies ist leicht einzusehen sowol für einen dieser Punkte, als auch für die anderen. Nehmen wir z. B. den Punkt D an, so muss derselbe als Mittelpunkt der Berührungskreise, welche die dem Kreise K oberhalb der gemeinsamen Seite AB eingeschriebenen Dreiecke innerlich berühren, auf dem Kreisbogen AB des Kreises K_c

liegen; analog für die Seite BC liegt derselbe auf den Kreisbogen BC des Kreises K_a', und in Bezug auf die Seite CA auf dem Kreisbogen CA des Kreises K_b'. Für ein und dasselbe Dreieck kann dieses nur dann stattfinden, wenn sich diese drei Kreisbögen in einem und demselben Punkte D schneiden.

Aehnlich beweist man, dass D_a der Schnittpunkt der Kreise K_a', K_b'' und K_c'', D_b der Schnittpunkt der Kreise K_a'', K_b' und K_c' D_c der Schnittpunkt der Kreise K_a'', K_b' und K_c' ist.

VI.

Desargues' Verdienste um die Begründung der projectivischen Geometrie.

Von

Stanislaus Chrzaszczewski, stud. math.
München.

Einleitung.

Wol nahezu 2000 Jahre beherrschten die Bücher des Euklid, Archimedes und Apollonius das Interesse der Geometer, ohne dass wesentliche Fortschritte in dem Aufbau der Kegelschnittstheorie gemacht worden wären. Immer noch bot diese Wissenschaft den Charakter einer speciellen, immer noch fehlte ihr der der Allgemeinheit. Ellipse, Parabel und Hyperbel wurden so behandelt, als ob sie unter sich fremdartige Gebilde wären.

Der erste, der eine Darstellung der oben genannten Curven von einheitlichem Gesichtspunkt aus mit grossem Geschick unternahm, ist Girard Desargues, indem bei ihm wesentlich das eine Bestreben zu Tage tritt, nur lagengeometrische Beziehungen, die doch für jeden beliebigen Kegelschnitt gelten, d. h. die projectivischen Eigenschaften derselben aufzustellen. Metrische Relationen werden von ihm nur ganz nebenher gestreift.

Der Verfasser hofft nun einen Beitrag zur Kenntniss der Geschichte der projectivischen Geometrie zu liefern, wenn er in der vorliegenden Abhandlung in erster Linie eine eingehende Darstellung der Desargues'schen Verdienste gibt, indem diese bisher in keinem

mathematisch-geschichtlichen Werke in der ihnen gebührenden Weise betrachtet worden sind. So konnte z. B im 2. Bande von Herrn Cantors Vorlesungen, die ja das ganze Gebiet der Mathematik umfassen, selbstverständlich nur eine cursorische und allgemeine Schilderung der Desargues'schen Arbeiten Raum finden und es musste eine genauere Auseinandersetzung derselben mit Recht einer Specialuntersuchung vorbehalten bleiben.

In den bekannten französischen Arbeiten von Chasles, Poudra und St. M. Marie sind die Ausführungen bezüglich Desargues teils unvollständig, teils auch nicht einwandsfrei dargestellt. Wieder andere Werke enthalten zu wenig, als dass es auch nur annähernd möglich ist, sich über Desargues' Leistungen eine genügende Vorstellung zu bilden.

Somit bleibt jedem, der die in Frage stehenden Verdienste Desargues' um die projectivische Geometrie kennen lernen will, nur die äusserst mühsame Lectüre der Originalwerke desselben übrig, namentlich des „Brouillon project." Volle zwei Jahrhunderte galt bekanntlich dies merkwürdige Buch für verloren. Erst im Jahre 1845 fand Chasles durch einen glücklichen Zufall eine Abschrift desselben, die im Jahre 1679 von De La Hire gefertigt worden war.

Da es aber nicht Aufgabe des Historikers ist, die wissenschaftliche Tätigkeit einer hervorragenden Persönlichkeit für sich allein zu betrachten, so müsste der Verfasser auch die Bedeutung Desargues' und seine Zeit, sowie den Einfluss seiner Leistungen auf die spätere Entwicklung der projectivischen Geometrie in's Auge fassen. Dabei ergaben sich enge und interessante Beziehungen zu Pascal, Fermat und De La Hire.

Die vorliegende Abhandlung ist ein Auszug der von der allgemeinen Abteilung der K. bayr. technischen Hochschule in München 1896 mit vollem Preis gekrönten Arbeit des Verfassers über Desargues.

---

§ 1.

Geometrische Grundgedanken.

Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, dass bereits Desargues diejenigen Fundamentalbegriffe ausdrücklich eingeführt hat, die man heutzutage als die geometrischen Grundgebilde erster Stufe bezeichnet.

Wir fassen seine Gedanken folgendermassen kurz zusammen:

1) Mehrere Geraden, die alle durch einen festen Punkt O gehen, bilden eine „ordonnance de droites, der Punkt *O* heisst: „but de l'ordonnance." [1])

Ebenso bildet man eine Schar von Ebenen, die durch eine feste Gerade O gehen, eine „ordonnance de plans," die feste Gerade O heisst: „Aissien de l'ordonnance."

3) Wenn durch verschiedene Punkte einer Geraden O eine Serie von Geraden hindurchläuft, so heisst jene Gerade O, auf welcher die verschiedenen Punkte „noeuds" liegen, „tronc."

4) Eine Schar von parallelen Geraden ist als ein Strahlenbüschel zu betrachten, dessen Centrum im Unendlichen liegt. Oder: Einen Punkt O mit dem unendlich fernen Punkt einer gegebenen Geraden verbinden heisst: durch den Punkt O zu derselben eine Parallele legen [2])

5) Eine Schar von parallelen Ebenen ist als ein Ebenenbüschel zu betrachten, dessen Achse im Unendlichen liegt.

6) Jede Gerade geht nach 2 Seiten in das Unendliche und schliesst sich dort. Jede Gerade kann als Kreis betrachtet werden, dessen Mittelpunkt in das Unendliche gerückt ist.

---

1) Vergleiche: Oeuvres de Desargues par Poudra deux tomes, Paris 1864. Wir citiren dieses Werk mit Herrn Cantor stets als Desargues I. oder II. Die Begriffe finden sich in der angegebenen Weise auf Seite 104—107 erklärt.

2) Desargues I. pag. 205.

3) Ebenda. I. pag. 107, 108, 224.

Dass die Desargues'sche Vorstellung über den Parallelismus in jener Zeit völlig neu war, dürfte wol daraus zur Genüge hervorgehen, dass sich Descartes in einem Briefe an Desargues in günstigem Sinne darüber äussert, und hätte ersterer die Angelegenheit wol ignorirt, wenn die fragliche Ansicht bereits in der damaligen Zeit üblich gewesen wäre. Lettres de Descartes, Poudra t. II. pag 134.

Eine Hauptschwierigkeit beim Studium der Werke Desargues besteht darin, dass derselbe nicht nur eine Reihe neuer Begriffe,' sondern auch eine Menge neuer Bezeichnungen für dieselben einführte, die aber ebensowenig, wie diejenigen Vietas sich forterhielten, weshalb wir im folgenden nur die notwendigsten anführen und gebrauchen werden.

Weit wichtiger ist es zu betonen, dass Desargues die Tragweite der von ihm neu aufgestellten Begriffe vollständig erfasst und mit ihnen zu operiren versteht, indem er in seiner Involution durch eindeutige Zuordnung der Elemente einer Punktreihe den Grundgedanken der projectivischen Geometrie zum ersten Male verwirklicht. Seine Betrachtungsweise der Involution wollen wir im folgenden Paragraphen nur insoweit klarzulegen versuchen, als sie zum Verständniss der darauf aufgebauten Kegelschnittstheorie notwendig ist.

§ 2.

Die Theorie der Involution.

(a) Definition des Arbre.[2])

Trägt man auf einer Geraden, von einem festen Punkte O aus, Streckenpaare ($0a$, $0a_1$ — 8b, $0b_1$, $0c$ — $9c_1$) ab, deren Producte constant sind, so bilden die Punkte $aa_1 - bb_1 - cc_1$ einen Arbre.

Hieraus ersieht man, dass Desargues' Definition des Arbre identisch ist mit der heutigen Bestimmung der Involution, wenn man vom Involutionsmittelpunkt O ausgeht, welchem Desargues den Namen: souche beilegt.

Dabei wird jedoch von vornherein bestimmt, dass alle Streckenpaare $0a$, $0a_1$ u. s. w. entweder nach verschiedenen Seiten oder nach der gleichen Seite von O abgetragen werden. Darnach erhält man beziehungsweise einen Arbre mit eingeschlossen- oder getrennt liegender Souche. In dem ersten Falle greifen die Strecken

---

Wenn man die Frage aufwirft, wie denn Desargues zu seiner so neuen und fruchtbaren Anschauung über den Parallelismus gekommen ist, muss man wol zur Beantwortung derselben auf die Perspective vom Jahre 1636 zurückgreifen. Desargues I. pag. 80 u. ff.

1) Desargues I. pag. 112.

entsprechender Punkte $aa_1 - bb_1 - cc_1$ übereinander, im zweiten Falle liegen sie getrennt. [1])

(b) **Metrische Relationen für die einzelnen Strecken eines Arbre.**

Desargues' Bestreben geht nun dahin, eine Gleichung zu finden, welche zwischen den einzelnen Entfernungen der verschiedenen Punkte eines Arbre statthat, um den Punkt 0 (d. h. den Involutionsmittelpunkt) zu eliminiren. Dabei gewinnt er folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{0a}{0c} = \frac{0c_1}{0a_1} = \frac{ac_1}{a_1c} \;{}^{2)}$$

$$\frac{0a_1}{0c} = \frac{0c_1}{0a} = \frac{a_1c_1}{ac}$$

Durch Division folgt

$$\text{II.} \quad \frac{0a}{0a_1} = \frac{ac_1 \,.\, ac}{a_1c_1 \,.\, a_1c}$$

und analog

$$\frac{0a}{0a_1} = \frac{ab_1 \,.\, ab}{a_1b_1 \,.\, a_1b}$$

---

1) La souche est engagée entre . . . Desargues I, pag;115, 116.
La souche est degagée entre . . . „ „ ;
les deux noeus de chacune des couples aa_1 se trouvent meslez aux deux noeus des autres couples: $bb_1 - cb_1$. Desargues I. pag. 116
les deux noeus de chacune des couples $aa_1 - bb_1 - cc_1$ se trouvent des meslez des deux noeus de chacune des autres couples. Desargues I. pag. 116.

2) Beweis:

$$\frac{0a_1}{0c} = \frac{0c_1}{0a} = \frac{0a_1 + a_1c_1}{0c + ca}$$

$$\frac{0a_1}{0a_1 + a_1c_1} = \frac{0c}{0c + ca}$$

und hieraus

$$\frac{0a_1}{0a_1 + a_1c_1 - 0a_1} = \frac{0c}{0c + ca - 0c}$$

d. h.

$$\frac{0a_1}{0c} = \frac{a_1c_1}{ac}$$

ebenso die andere Gleichung.

Die Vergleichung liefert:

$$\text{III.} \quad \frac{ab \;.\; ab_1}{a_1b \;.\; a_1b_1} = \frac{ac \;.\; ac_1}{a_1c \;.\; a_1c_1}$$

Dadurch ist offenbar der Arbre unabhängig von der Souche dargestellt und ergibt sich folgende

(6) **Definition der Involution, unabhängig vom Mittelpunkt.**

Wenn drei Punktepaare $aa_1 - bb_1 - cc_1$ so auf einer Geraden liegen, dass die einzelnen Punkte gegenseitige Entfernungen besitzen, die der Gleichung III. Genüge leisten, so nennt man diese Punktlage eine Involution.[1]) Vorausgesetzt bleibt aber immer noch die Verteilung der Punkte, wie sie unter α hervorgehoben worden ist. Die daraus sich ergebende strenge Einteilung in zwei verschiedene Involutionen fällt mit der modernen Unterscheidung einer elliptischen und hyperbolischen Involution völlig zusammen, und später werden wir auch noch der parabolischen begegnen. Auf die Involutionen lassen sich sämtliche Gesetze des Arbre, wie sie in den Gleichungen I. und II. niedergelegt sind, anwenden.

Wir brauchen kaum noch hinzuzufügen, dass die Gleichung III. genau dieselbe ist, wie diejenige, die heutzutage die Involution durch die Gleichheit zweier Doppelverhältnisse definirt.

(d) Sätze über die Involution.

1) Eine Involution erscheint gegeben, wenn man 2 Punktepaare, $aa' - cc_1$ derselben kennt.[2])

Denn wenn O die Souche ist, so kann man dieselbe vermittelst folgender Gleichungen eindeutig[3])

$$\frac{Oa}{Oc} \quad \frac{a_1 c_1}{a_1 c} \quad \text{und} \quad 4a - Oc = ac$$

---

1) Involution und Arbre decken demnach denselben Begriff. Es besteht zwischen ihnen nur insofern ein formaler Unterschied, als die Bezeichnung Arbre immer nur dann angewendet wird, wenn die Strecken vom Involutionsmittelpunkt ausgezählt werden.

2) Desargues I. pag. 121.

3) . . . „la souche O est donnée de position . . .“ Desargues I. pag. 121.

2) Der Involutionsmittelpunkt entspricht dem unendlich weiten Punkt der Punktreihe. [1])

3) Bis hieher führt Desargues seine Untersuchungen für beide Involutionen gemeinsam durch. Zur Beantwortung der Frage aber: Wo liegen diejenigen Punktepaare einer Involution, die von der Souche gleichen Abstand haben? sieht er sich genötigt, in der Untersuchung eine Trennung vorzunehmen.

Bezeichnen x und y diejenigen Punkte, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, so hat man im Falle der Punktlage nach Figur 1a:

$$0x = 0y = \sqrt{0a \,.\, 0a_1}$$

(wenn aa_1 ein gewöhnliches Punktpaar vorstellt.)

Hiebei betont Desargues ganz scharf, dass der Punkt x zwei nicht zusammengehörige Punkte bc_1, der Punkt y die Punkte $b_1\,c$ repräsentirt, und bezeichnet sie daher als noeus moyens simples. [2]) (Siehe Figur 2a). Durch Specialisirung der allgemeinen Involutionsgleichung erhält man folgende Relation:

$$\frac{a_1x}{a_1y} = \frac{ay}{ax}$$

Der Fall nach Figur 1b liefert wiederum

$$0x = 0y = \sqrt{0a \,.\, 0a}$$

wobei Desargues ausdrücklich hervorhebt, dass x das Paar bb_1, y das Paar ec_1 repräsentirt. Dementsprechend bezeichnet er sie richtig als „noeus moyens doubles [3]), kennt somit die Doppelpunkte der hyperbolischen Involution. (Siehe Figur 2b).)

Ist aa_1 ein gewöhnliches Punktepaar, so geht bei Einführung der Punkte xy in die allgemeine Involutionsbedingung die sehr wichtige Relation hervor:

$$\frac{ax}{ay} = \frac{a_1x}{a_1y}$$

Dieselbe drückt aus, dass ein gewöhnliches Punktepaar aa_1 von den Punkten xy, also von den Doppel-

---

1) Desargues I. pag. 127.

2) Desargues I. pag. 123.

3) Desargues I. pag. 124.

punkten harmonisch getrennt wird, was oben durchaus nicht der Fall war.

(e) Die Vierpunktinvolution. Indem Desargues die besondere Wichtigkeit des soeben behandelten Falles anerkennt, nennt er die Punktelage $aa_1 - xy$ (Fig. 2b) eine Vierpunktinvolution und entwickelt eine Reihe von Sätzen, die bei derselben statthaben, eine vollständige Theorie der harmoischen Punkte. Als solche nennt er auch die Punkte x und y ein Paar entsprechende, und bezeichnet in der Erkenntniss, dass ay mit aa_1 gleichberechtigt erscheint, die Mitte p von aa_1 als die reciproke Souche der Vierpunktinvolution. Man hat dann neben

$$0x \,.\, 0y = 0a \,.\, 0a_1 = 0x^2 = 0y^2$$

auch noch

$$pa \,.\, pa_1 = px \,.\, py = pa^2 = pa_1{}^2$$

Aus den sich hieran anschliessenden Sätzen heben wir nur folgende hervor:

1) Eine Vierpunktinvolution ist gegeben, wenn man ein Punktepaar und den einen Punkt des anderen Paares kennt. [1])

2) Die Endpunkte einer Strecke bilden mit dem Mittelpunkt derselben und dem unendlich fernen Punkt der Geraden, auf welcher sie liegt, eine Vierpunktinvolution. [2])

3) Hat man eine Vierpunktinvolution ($aa_1 - xy$), deren Souche 0 ist, so sind damit sofort zwei neue allgemeine Involutionen gegeben. Nämlich

$xy - 0a_1$ mit Souche a und

$xy - 0a$ mit Souche a_1

Desargues beschliesst die Theorie seiner Punktinvolution mit einem Satze, der für später von besonderer Wichtigkeit ist und deshalb angeführt werden möge.

4) Hat man auf einer Geraden drei Punktepaare einer gewöhnlichen Sechspunktinvolution ($aa_1 - bb_1 - ee_1$), sowie ein weiteres Punktepaar xy, das mit den beiden ersten Paaren ($aa_1 - bb_1$) je eine Vierpunktinvolution bildet, so gilt dies auch bezüglich des letzten Paares cc_1.

---

1) Desargues I. pag. 134.

2) Desargues I. pag. 136.

Hieran schliesst sich eine ebenso vollständig durchgeführte Behandlung der

(f) Strahleninvolution,[1]) welche folgendermassen definirt wird: Laufen durch drei Punktepaare einer Involution drei Strahlenpaare, so hat man eine Strahleninvolution (ramé d'un arbre). Auf diese Definition folgt direct der Hauptsatz von der Invarianz der Involution bei Projection:

„Jede beliebige Gerade wird von den 6 Strahlen des Büschels nach 6 Punkten einer Involution geschnitten.“ [2])

Infolge der umständlichen Schreibweise Desargues' gestaltet sich der Beweis dieses wichtigen Satzes, von dem man sagen kann, dass er das Fundament der vorliegenden Kegelschnittstheorie ist, breit und unübersichtlich; wir glauben denselben deshalb mitteilen zu müssen, weil er historisch interessant ist und ein beredtes Zeugniss von dem geometrischen Scharfsinn unseres Mathematikers ablegt.

Zunächst ist der Satz für den speciellen Fall ohne weiteres klar, „dass das Büschelcentrum im Unendlichen liegt“ d. h. wenn die einzelnen Strahlen parallel laufen. [3]) Für den allgemeinen Fall jedoch ist folgende Figur (Fig. 3) zu entwerfen: Die Involution $aa_1 - bb_1 - cc_1$ wird durch das Strahlenbüschel K projicirt, und die beliebige Gerade M liefert auf den Strahlen derselben drei weitere Punktepaare $AA_1 - BB_1 - CC_1$, von denen nachzuweisen ist, dass sie eine Involution bilden.

Zum Beweise zieht nun Desargues die Hilfslinie cC_1. welche auf den Strahlen bezüglich der Punkte $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1$ liefert.

Nunmehr wird auf die folgenden Dreiecke der Transversalensatz des Menelaos angewendet. Das Dreieck cCC_1 von der Transversale KB_1 geschnitten, liefert die Gleichung: [4])

$$1) \qquad \frac{B_1C}{B_1C_1} = \frac{KC}{Kc} \cdot \frac{\beta_1 c}{\beta_1 C_1}$$

Das nämliche Dreieck cCC_1 von KB geschnitten, ergibt:

---

1) Desargues I. pag. 146, 147.

2) Desargues I. pag. 147.

3) Desargues I. 147.

4) Desargues, der diesen Satz dem Ptolemäus zuschreibt, da er ihn jedenfalls aus dem Almagest kennt, wendet ihn, den Griechen folgend, beständig in der obigen Form, der der zusammengesetzten Verhältnisse, an.

$$2) \qquad \frac{BC}{BC_1} = \frac{KC}{Kc} \cdot \frac{\beta c}{\beta C_1}$$

1) und 2) verbunden, ergeben:

$$\text{I)} \qquad \frac{BC \cdot B_1 C}{BC_1 \cdot B_1 C_1} = \frac{\beta c \cdot \beta_1 c}{\beta C_1 \cdot \beta_1 C_1} \cdot \left(\frac{KC}{Kc}\right)^2$$

Schneidet man das Dreieck $c c_1 C_1$ bzhw. durch die Transversalen Kb_1 und Kb, so erhält man:

$$3) \qquad \frac{\beta_1 c}{\beta_1 C_1} = \frac{b_1 c}{b_1 c_1} \cdot \frac{Kc_1}{KC_1}$$

$$4) \qquad \frac{\beta c}{\beta C_1} = \frac{bc}{bc_1} \cdot \frac{Kc_1}{KC_1}$$

und hieraus:

$$\text{II} \qquad \frac{\beta c \cdot \beta_1 c}{\beta C_1 \cdot \beta_1 C_1} = \frac{bc \cdot b_1 c}{bb_1 \cdot b_1 c_1} \cdot \left(\frac{Kc_1}{KC_1}\right)^2$$

I. und II. verknüpft, liefern:

$$\text{A.} \qquad \frac{BC \cdot B_1 C}{BC_1 \cdot B_1 C_1} = \left(\frac{KC \cdot Kc_1}{Kc \cdot KC_1}\right)^2 \cdot \frac{bc \cdot b_1 c}{bc_1 \cdot b_1 c_1}$$

In dieser Gleichung A. erscheint die Buchstabengruppe CC_1BB_1 besonders ausgezeichnet. Durch Auszeichnung der Gruppe aa_1AA_1 entsteht bei der Beibehaltung der Hülfslinie cC_1 die Gleichung:

$$\text{B.} \qquad \frac{AC \cdot A_1 C}{AC_1 \cdot A_1 C_1} = \left(\frac{KC \cdot Kc_1}{Kc \cdot KC_1}\right)^2 \cdot \frac{ac \quad a_1 c_1}{ac_1 \cdot a_1 c_1}$$

Indem nun nach Voraussetzung:

$$\frac{ac \cdot a_1 c}{ac_1 \cdot a_1 c_2} = \frac{bc \cdot b_1 c}{bc_1 \cdot b_1 c_1}$$

ist, ergibt sich aus A. und B. die Beziehung:

$$\frac{AC \cdot A_1 C}{AC_1 \cdot A_1 C_1} = \frac{BC \cdot B_1 C}{BC_1 \cdot B_1 C_1}$$

Damit ist aber gemäss Hauptgleichung III. auf Seite 124 die Behauptung bewiesen.

Beachtungswert scheint uns auch noch die Bemerkung Desargues'[1])

1) Desargues I. pag. 151.

Läuft die schneidende Transversale M parallel zu einem der projicirenden Strahlen, etwa Ka, so schneidet der entsprechende Strahl Ka_1 die Gerade M in der Souche, der auf M entstehenden Involution.

Von dieser Behandlung der allgemeinen Sechsstrahleninvolution geht er nun auf die Theorie der

(g) Vierstrahleninvolution [1]) über, die dadurch entsteht, dass man eine Vierpunktinvolution $(aa_1 - xy)$, also eine harmonische Punktlage, von einem Centrum K aus projicirt. Wir nennen dieselbe heutzutage ein harmonisches Strahlenbüschel. (Fig. 4.)

Von diesem Teile der Desargues'schen Untersuchungen erwähnen wir der Kürze halber nur die einzelnen Sätze, obgleich noch manches Interessante bei der Beweisführung zur Sprache kommen könnte.

Heissen in Analogie mit dem Früheren die Strahlen $\alpha\alpha_1 - \xi\eta$ entsprechende, so hat man:

Läuft die Transversale M parallel zu einem Strahl α_1, so halbirt in der Vierstrahleninvolution der entsprechende α die von den beiden anderen Strahlen ξ und η auf ihr ausgeschnittene Strecke. Dieser Satz gilt auch umgekehrt. [2])

Auch das Rechtwinkelpaar einer Vierstrahleninvolution findet Erwähnung in dem Satze: (Fig. 5.)

Stehen zwei entsprechende Strahlen aufeinander senkrecht, so halbirt jeder derselben den Winkel zwischen dem anderen Strahlenpaar. Auch wird die Umkehrung angeführt.

Zieht man in einem Dreieck ABC durch die Mitte M von AB eine beliebige Gerade MY, welche BC in Z, AC in Y trifft, zieht man ferner $CN \parallel ZX \parallel AB$, so bilden $AC - XY$ und $MN - YZ$ je eine Vierpunktinvolution.

Mit diesen verschiedenartigen Sätzen haben wir die Mittel gewonnen, um im folgenden Paragraphen die eigenartige Behandlung der Kegelschnittstheorie schildern zu können, die Desargues geschaffen hat.

1) Desargues I. pag. 152.

2) Man beachte die kühnen Schlussweisen des Desargues im Beweise für die Umkehrung. Weil die Mitte m auf α conjugirt ist zu dem unendlich fernen Punkte $\overset{\infty}{m}_1$ auf α_1, so muss $M \parallel \alpha_1$ laufen.

§ 3.

Kegelschnitttheorie.

(a) Definition des Kegels. Der Kegel entsteht durch Bewegung einer Geraden G, die, stets durch einen festen Raumpunkt S gehend, längs einer gegebenen Kreislinie dahingleitet. Liegt S im Unendlichen, so entsteht der Cylinder, [1]) liegt S in der Ebene des Kreises, so erhält man einen Strahlenbüschel.

(b) Die einzelnen Kegelschnitte. Eine Ebene E_0, die durch die Spitze des Kegels geht, trifft denselben entweder in einem Punkte oder in 2 Geraden, die in eine einzige zusammenfallen, wenn E_0 die Fläche berührt. Jede andere Ebene E trifft den Kegel nach einem Kegelschnitt. Und zwar:

Läuft die Kegelerzeugende G während ihrer Bewegung um den Kreis niemals parallel zu E, so erhält man eine im Endlichen sich schliessende Schnittfigur [2]), die Ellipse; läuft G während der Bewegung um den Kreis nur einmal parallel zu E, so ist das Schnittergebniss eine im Unendlichen sich schliessende Curve [3]), die Parabel; läuft G während der Bewegung um den Kreis zweimal parallel zu E, so erhält man als Schnittfigur eine sich im Unendlichen in zwei congruente, gegeneinandergekehrte Hälften spaltende Figur, die Hyperbel. [4]) Der Cylinder wird im allgemeinen nach einer Ellipse geschnitten.

Diese aus einer völlig neuen Auffassungsweise entstandenen Sätze charakterisiren die drei Kegelschnittsarten nach der Anzahl ihrer unendlichfernen Punkte.

Die Kegelschnitte werden von je einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten. Fallen dieselben in einen zusammen, so berührt die Gerade den Kegelschnitt.

Nicht viel verschieden von der oben geschilderten Entstehungs-

---

1) „Le cylindre et le cone sont deux sougenres d'un surgenre, ici nommé seauleau . . ." Desargues I. pag, 159.

2) une ligne courbe, laquelle à distance finie rentre et repasse en soi-même. Desargues I. pag. 161.

3) „une ligne courbe laquelle à distance infinie rentre et repasse en soi-même — " Desargues I. pag. 162.

4) „une ligne courbe, laquelle à distance infinie se mipartit en deux égales et semblables moitiés . . . " Desargues I. pag. 162.

weise der Kegelschnitte ist diejenige, von welcher Oldenburg in einem Briefe an Leibniz berichtet [1]) Nach ihm soll sich dieselbe in den bis heute noch nicht wieder aufgefundenen Leçons des Tenèbres von Desargues befinden. Sie lautet kurz zusammengefasst:

Projicirt man vom Mittelpunkte einer Kugel aus einen kleinen Kreis derselben auf eine ihrer Tangentialebenen, so erhält man entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder endlich eine Hyperbel, jenachdem der zur genannten Ebene parallele Hauptkreis der Kugel den kleinen Kreis nicht trifft, denselben berührt oder endlich in zwei Punkten schneidet.

Nach diesen einleitenden Definitionen der Kegelschnitte wendet sich Desargues zur Aufstellung jenes Hauptsatzes, der heute noch seinen Namen trägt:

(c). Der Satz des Desargues. Derselbe wird folgendermassen ausgesprochen: Laufen durch vier Punkte einer Ebene drei Paare von Geraden, sowie auch ein beliebiger Kegelschnitt, so schneidet irgend eine Transversale diese Figur nach vier Punktepaaren einer Involution.

Der Beweis zerfällt in drei Abteilungen und wird im wesentlichen mit Hülfe des Transversalensatzes von Menelaos geführt. (Fig. 7.)

Das Dreieck pp_1f wird bzhw. von den Transversalen bc, de, bd und ec geschnitten, und es ergeben sich sofort folgende Gleichungen:

1) $$\frac{ip}{ip_1} = \frac{cf}{cp_1} \cdot \frac{bp}{bf}$$

2) $$\frac{i_1p}{i_1p_1} = \frac{df}{dp_1} \cdot \frac{ep}{ef}$$

3) $$\frac{gp}{gp_1} = \frac{cf}{cp_1} \cdot \frac{cp}{ef}$$

4) $$\frac{g_1p}{g_1p_1} = \frac{bp}{bf} \cdot \frac{df}{dp_1}$$

Durch Multiplication der Gleichungen 1) und 2), sowie 3) und 4) folgt unmittelbar:

1) Leibnizens Mathematische Schriften, ed. J. C. Gerhardt. B. I. Abt. I pag. 40.

$$\text{I.} \qquad \frac{ip \cdot i_1p}{ip_1 \cdot i_1p_1} = \frac{gp \cdot g_1p_1}{gp_1 \cdot g_1q_1}$$

d. h. doch die drei Punktepaare $ii_1 - gg_1 - pp_1$ bilden eine Involution [1]).

Liegen nun die vier, ursprünglich willkürlichen Punkte: *bcde* auf einem Kreise, so folgt durch wiederholte Anwendung des Potenzsatzes:

$$\frac{ip \cdot i_1p}{ip_1 \cdot i_1p_1} = \frac{cf \quad df}{bf \cdot ef} \cdot \frac{bp \cdot ep}{cp_1 \cdot dp_1} = \frac{bp \cdot ep}{cp_1 \cdot pp_1} = \frac{lp \cdot l_1p}{lp_1 \cdot l_1p_1}$$

und daraus:

$$\frac{ip \cdot i_1p}{ip_1 \cdot i_1p_1} = \frac{lp \cdot l_1p}{lp_1 \cdot l_1p_1} = \frac{gp \cdot g_1p}{gp_1 \cdot g_1p_1}$$

Diese Gleichungen definiren die drei Involutionen

$$(ii_1 - ll_1 - pp_1), \quad (gg_1 - ll_1 - pp_1) \quad \text{und} \quad (ii_1 - gg_1 - pp)$$

welche aber zusammenfallen müssen, weil sie je zwei Punktepaare gemeinsam haben.

Um nun endlich den Satz für einen beliebigen Kegelschnitt nachzuweisen, bedient sich Desargues der Methode der Projection, die hier zum ersten Male auftritt und zeigt, dass er den Charakter der Projectivität seiner Involution (d. h. die Invarianz) vollkommen richtig erkannt hat. Auch hebt er die Wichtigkeit und Verwendbarkeit dieser seiner Methode ausdrücklich hervor und kommt noch an anderer Stelle darauf zu sprechen. [2])

Dieser wichtige Satz bildet nun für Desargues das Fundament zu einer vollständigen Theorie von

(d) Pol und Polare, die bisher immer de La Hire zugeschrieben wurde. Pol und Polare werden durch die bekannte harmonische Eigenschaft, die, wie wir schon wissen, Desargues als die Vierpunktinvolution bezeichnet, sowol in Bezug auf ein Geradenpaar als auch in Bezug auf einen Kegelschnitt definirt.

---

1) Dieser specielle Fall des Satzes für das Vierseit ist bekanntlich in seiner Umkehrung bereits von Pappus im 130ten Satze des 8. Buches der Collectiones math. angegeben worden. Jedoch tritt statt der obigen achtgliedrigen Bedingungsgleichung die sechsgliedrige auf.

2) Desargues I. pag. 176 ff., pag. 493.

Was den Beweis dafür anlangt, dass die sämtlichen harmonischen Punkte zum Pol f (bei Desargues but de l'ordonnance) bezüglich der Schnittpunkte mit den eben genannten Figuren auf einer Geraden, der Polaren des Punktes (traversale d'une ordonnance au but f) liegen, so wird derselbe zunächst für das Geradenpaar (AA_1) geliefert und hierauf vermittelst des Desargues'schen Satzes auf einen beliebigen Kegelschnitt (K) ausgedehnt. (Fig 8.)

Um die Polare des Punktes f in Bezug auf das Geradenpaar (AA_1) zu construiren, zieht Desargues zwei beliebige Strahlen fcb und fde, welche auf A und A_1 bzhw. die Punkte cd und be liefern. Der Schnittpunkt m der Diagonalen ce und bd mit n, dem gemeinsamen Punkt von A und A_1, verbunden, liefert die verlangte Polare. Die Verbindungslinie fm schneidet A und A_1 in den Punkten x und y.

Wendet man in Bezug auf das Dreieck nxy den Satz von Menelaos an, indem man $bd - ce - de - bc$ bzhw. als schneidende Transversalen ansieht, so hat man:

$$1)\qquad \frac{mx}{my} = \frac{dx}{dn} \cdot \frac{bn}{by}$$

$$2)\qquad \frac{mx}{my} = \frac{cx}{cn} \cdot \frac{cn}{cy}$$

$$3)\qquad \frac{fx}{fy} = \frac{dx}{dn} \cdot \frac{en}{ey}$$

$$4)\qquad \frac{fx}{fy} = \frac{cx}{cn} \cdot \frac{bn}{by}$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\left(\frac{mx}{my}\right)^2 = \left(\frac{fx}{fy}\right)^2 \quad \text{d. h.} \quad \frac{mx}{my} = \frac{fx}{fy}\ ^{1)}$$

Liegen aber hiernach mf und xy harmonisch, so muss auch ein beliebiger Strahl $fk - ii_1$ vier harmonische Punkte liefern.

Geht nun durch die vier Punkte $bzde$ ein ganz beliebiger Kegelschnitt, so ist nach Desargues die bereits construirte Linie auch die Polare in Bezug auf den Kegelschnitt. Denn auf dem beliebigen Strahl fl, der den Kegelschnitt in l und l_1 trifft, liegt die Involution $(ii_1 - gg_1 - ll_1)$, deren Punktepaare $(ii_1 - gg_1)$ von f und k harmo-

---

1) Man erkennt sehr leicht, dass dieser bekannte Satz ein specieller Fall von dem unter lit. c. dieses Paragraphen gegebenen Satze über das Vierseit ist.

nisch getrennt werden. Die beiden letztgenannten Punkte sind somit die Doppelpunkte obiger Punktreihe, so dass sie auch zum Punktepaar ll_1 harmonisch liegen müssen, was aber zu beweisen war.

Daran schliesst sich sofort eine Reihe von

(e) Sätzen über Pol und Polare, von denen wir die wichtigsten hervorheben wollen:

1) Es findet sich der Hinweis, dass die Linie mf (Figur 8) Polare zu n, die Linie nf Polare zu m sei. [1]).

2) Diejenigen Geraden, welche den Pol f mit den Schnittpunkten s und t der Polaren mit dem Kegelschnitt verbinden, berühren denselben. [2])

3) Die Pole der Geraden eines Büschels liegen auf der Polaren seines Centrums und umgekehrt. [3])

4) Die Polaren der Punkte einer Geraden laufen durch den Pol derselben. [4])

Es ist kaum nötig darauf hinzuweisen, dass die beiden letztgenannten Sätze das Princip der reciproken Polaren enthalten.

5) Wie ferner Desargues jedem Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts eine einzige Polare bezüglich desselben zuordnet [5]) und auch umgekehrt jeder Geraden nur einen Pol, so weist er auch eder Geraden eine ganz bestimmte Involution [6]) zu, nämlich die der Punkte m und n, also die Involution der conjugirten Pole. Lässt man n längs der Geraden ns variiren, so bekommt man immer andere und andere Lagen der Punkte (mn). Und zwar gilt hierüber folgendes:

(α) Jedem Punkte f ausserhalb eines Kegelschnitts gehört eine Polare zu, die den Kegelschnitt in zwei Punkten trifft, und die dieser gemäss (5) zugewiesene Involution ist hyperbolisch [7]).

---

1) Desargues I. pag. 18d.

2) Desargues I. pag. 192.

3) Desargues I. pag. 191.

4) Desargues I. pag. 191.

5) Desargues I. pag. 192.

6) Desargues I. pag. 194, 195.

7) „l'arbre est d'espèce à souche dégagée.“ Desargues I. pag. 195.

(β) Jedem Punkte im Innern eines Kegelschnitts gehört bezüglich desselben eine Polare zu, die denselben nicht schneidet, und die dieser gemäss (5) zugewiesene Involution ist elliptisch [1])

γ) Der Pol einer Tangente des Kegelschnitts bezüglich desselben liegt im Berührpunkt, und die der Tangente gemäss (5) zugewiesene Involution ist parabolisch. [2])

Desargues hebt also die parabolische Involution ausdrücklich als eine dritte Anordnung der involutorischen Punktlage hervor.

6) (Siehe Figur 9.) Jeder Strahl ($s_1 s_1' s_1''$, . . .) eines Strahlenbüschels f trifft einen Kegelschnitt in Punkten (ab, $a'b'$, $a''b''$) so, dass ihre Verbindungsstrahlen mit einem festen Punkte p auf dem Kegelschnitt eine Strahleninvolution ($\alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta''$ . . .) bilden[3]) Und die Umkehrung:

7) (Fig. 9.) Die sich entsprechenden Strahlen einer Involution ($\alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta''$ . . .). deren Centrum (p) auf einem Kegelschnitt liegen, schneiden denselben in Punkten: ($ab - a'b' - a''b''$ . . .), deren Verbindungslinien stets durch einen festen Punkt laufen. [4])

8) Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts wird von Desargues als Pol der unendlich fernen Geraden definirt. [5])

(f) Ausdehnung der Polarentheorie auf den Raum. Desargues begnügt sich aber nicht damit eine vollständige Polarentheorie der Kegelschnitte zu entwerfen, sondern er dehnt dieselbe sogar auf den Raum aus, indem er die Polarebene (plan

1) „l'arbre est d'espàce à souche engagée". Desargues I. pag. 193.

2) „Cependant on remarquera qu'entre les deux espèces de conformation, d'arbre, il y en a une troisième, en la quelle chaque couple de nous toujours un est uni à la souche, . . . et cette espece de conformation d'arbre est mitoyenne entre autres les deux, à souche engagée et à couche dégagée". Desargues I. pag. 194. 195.

3) Desargues I. pag. 194.

4) Die Sätze 6) und 7) führten später, wieder neu gefunden, zur Betrachtung der krummen involutorischen Punktreihen.

5) „Quand en un plan, aucun des points d'une droite n'y est à distance finie, cette droite y est à distance infinie. D'autant qu'en un plan le point nommé centre d'une coupe de rouleau, n'est qu'un cas d'entre les innombrables buts d'ordonnance de droites, il ne doit être jamais ici parlé de centre de coupe de rouleau." Wir glaubten auf Grund dieser Stelle (Desargues I. pag. 166, 168) den Satz (8) in der angegebenen Weise formuliren zu dürfen. Vergleiche auch Des. I. pag. 168 ff.

traversal des droites d'une ordonnance) in Bezug auf eine Kugel nach Analogie der Verhältnisse in der Ebene definirt.[1] Ja, es wird sogar der folgende Satz deutlich ausgesprochen: Bewegen sich verschiedene Geraden, die alle je einen festen Punkt in einer gegebenen Ebene besitzen, um eine Kugel, so sind die Ebenen der dabei durchlaufenen Berührungskreise die Polarebenen zu jenen festen Punkten; überdies gehen diese alle durch den Pol der ursprünglich gegebenen Ebene.

Dazu fügt Desargues nachfolgende merkwürdige Stelle:

„Eine ähnliche Eigenschaft findet sich auch in Bezug auf andere Körper, die zur Kugel in dem nämlichen Verhältniss stehen, wie die Ovale oder Ellipsen zum Kreise," aber es wäre hierüber zuviel zu sagen, wenn man nichts dabei übersehen wollte."[2]

Darin scheint zum mindesten eine Vorahnung der Collineationsverwandtschaft zwischen den Flächen zweiten Grades und der Kugel angedeutet zu sein.[3]

(g) Eine wichtige Anwendung, die Desargues von der Polarentheorie macht, und auf welche wir später noch zurückkommen werden, wollen wir hier nicht übergehen. Es handelt sich darum, den Mittelpunkt, ein paar conjugirter Durchmesser, sowie auch die Tangenten und Asymptoten eines Kegelschnitts zu ermitteln, der dadurch entsteht, dass eine gegebene Kegelfläche mit kreisförmiger Basis durch eine beliebige Ebene E geschnitten wird. Desargues verfährt folgendermassen: Durch die Spitze f des Kegels legt er eine Hülfsebene E_0 parallel zu E, welche die Kreisebene in S_0 trifft, während E dieselbe in S schneiden möge. Der Pol von S_0 bezüglich des Kreises sei p, und die ihr gemäss Satz 5 auf Seite 134 zugehörige Involution: (mn, $m'n'$; $m''n''$ u. s. w.) (Fig. 10a). Die Verbindungslinie der Kegelspitze f mit dem Pol p ist Achse eines

1) Desargues I. pag. 214.

2) Desargues I. 124, 215.

3) Aehnlich drückt sich Poncelet, ebenfalls anschliessend an die Ebene in seinem Traité des propriétés projectives des figures t. I. pag. 125 aus, indem er sagt: Uebrigens lässt sich die Theorie der reciproken Polaren ohne Mühe auf Raumfiguren ausdehnen, indem man den Kegelschnitt durch eine beliebige Fläche zweiten Grades ersetzt, ich trete aber nicht in den Gegenstand dieses Capitels ein, das uns zu lange aufhalten würde u. s. w. u. s. w.

Ebenenbüschels,[1]) die auf der gegebenen Ebene E den Mittelpunkt des entsprechenden Kegelschnitts ausscheidet; Ebenenpaare des Büschels, welche durch zwei conjugirte Punkte der Involution auf S_0 gehen, schneiden in E ein Paar conjugirter Durchmesser aus[2]), deren Endpunkte in der einfachsten Weise bestimmt werden können. Auch die Tangenten und Asymptoten, welch' letztere bei dieser Gelegenheit wol zum ersten Male als Durchmesser und Tangenten in den unendlich weiten Punkten betrachtet werden, lassen sich mit Hülfe der construirten Involution ermitteln, wenn auch die Construction der letzteren Elemente nicht besonders scharf angegeben ist.

Um in der gegebenen Figur 10a, die in Orthogonalprojectionen den Vorzug illustriren soll, einen Punkt des entstehenden Kegelschnitts zu finden, ziehen wir die Gerade mp, legen durch diese und die Kegelspitze f eine Ebene, die den Kegel in dem Dreieck $\delta\beta f$ trifft; die Schnittlinie Mb derselben Ebene mit der gegebenen Ebene E (Spuren S und T) muss parallel laufen zu mf, welche doch in der Hülfsebene E_1 (Spuren $S_0 T_0$) liegen muss; Mb schneidet das Dreieck in zwei Punkten des gesuchten Kegelschnitts. Dieselbe Construction mit dem Punkte n ausgeführt, liefert zwei neue Punkte ac. ac und bd sind zugleich conjugirte Durchmesser des sich ergebenden Schnittgebildes, μ ist sein Mittelpunkt.

Lösen wir nun aus der Figur 10a die Figur 10b heraus, und denken uns den ganzen Vorgang in einer Ebene ausgeführt, so steht eine Construction vor uns, die nach der bisherigen Ansicht von De La Hire im Jahre 1673 in seinen Planiconiques zum ersten Male gegeben wurde und die Transformation des Kreises in einen Kegelschnitt leistet; dass De La Hire durch obigen Gedankengang zu dieser gelangt ist, dürfte wol ausser allem Zweifel sein.

Die übrigen noch im Brouillon enthaltenen Sätze aus der Kegelschnittstheorie beanspruchen nicht das Interesse, wie die angeführten, da sie teilweise kaum verständlich gefasst sind. Dagegen wollen wir noch den bekannten

---

1) et la droite menée par le sommet du rouleau et ce but p (F) est l'essieu de l'ordonnance de plan etc. Des. I. pag. 196.

2) Aus dieser Construction lässt sich unmittelbar der Satz ablesen, dass die conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts eine Involution bilden, indem dieselben, wie aus der Figur ersichtlich ist, eine Punktinvolution projiciren, oder durch einen involutorischen Ebenenbüschel ausgeschnitten werden.

(h) Satz über perspectivisch liegende Dreiecke [1]) erwähnen, welcher sich in der von Bosse herausgegebenen Perspective des Desargues befindet. Er lautet: Wenn die Geraden (siehe Figur 11) *HDa*, *HEb*, *cED*, *lga*, *lfb*, *abc*, *HlL*, *DgK*, *EfK* sich irgend wie im Raume oder in einer und derselben Ebene gegenseitig durchschneiden, so müssen auch die Punkte *cfg* auf einer Geraden liegen. Desargues gibt zunächst einen Beweis für den Raum, wie er heute noch allgemein üblich ist; für die Ebene gelingt derselbe durch dreimalige Anwendung des Satzes von Menelaos, indem die Dreiecke *DHK*, *KEH* und *DHE* mit den Transversalen *lga*, *bfl* und *abc* geschnitten werden. Man hat dann:

$$1)\quad \frac{gD}{gK} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{lH}{lK}$$

$$2)\quad \frac{fK}{fE} = \frac{lK}{lH} \cdot \frac{bH}{bE}$$

$$3)\quad \frac{cD}{cE} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{bH}{bE}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{gD}{gK} \cdot \frac{fK}{fE} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{bH}{bE}$$

und in Verbindung mit (3) ergibt sich:

$$\frac{cD}{cE} = \frac{gD}{gK} \cdot \frac{fH}{fE}$$

oder

$$\frac{cD}{gD} = \frac{fK}{gK} \cdot \frac{cE}{fE}$$

somit liegen nach der Umkehrung des Satzes von Menelaos die drei Punkte *c*, *f*, *g* in einer Geraden.

Auch findet sich der Hinweis, dass in solchen Fällen, wo Sätze für den Raum aufgestellt werden, dieselben ohne weiteres eine Deutung in der Ebene zulassen. [2])

---

1) Desargues I. pag. 413.

2) . . . et l'on peut discourir de leurs propriétés sur l'une comme sur l'autre, et par ce moyen se passer de celle du relief en lui substituant celle d'un seul plan." Desargues I. pag. 415.

§ 4.

Rückblick.

Blicken wir noch einmal auf die geführte Untersuchung zurück, so ergeben sich folgende Hauptresultate: Desargues baut bereits die Geometrie im wesentlichen auf der Betrachtung der Grundgebilde erster Stufe auf, wie es nachmals, unabhängig von ihm, J. Steiner getan hat. Wohl findet er nicht die allgemeine projectivische Beziehung dieser Grundgebilde, aber ersetzt dieselbe durch die Involution, die er in ihrer vollständigen Allgemeinheit erkennt und bis in's Detail behandelt. Diese führt ihn zu einer eingehenden Behandlung der Polarentheorie, [1]) die ihrerseits auf den Satz vom Kegelschnitt, dem ein Vierseit eingeschrieben ist, gestützt wird. Ausserdem ist Desargues vollständig vertraut mit dem Begriff der Invarianz geometrischer Eigenschaften bei Projection, und diese allein ermöglicht ihm eine Behandlung der Kegelschnittstheorie, wie sie in einer solchen Allgemeinheit nie vor ihm gegeben worden war. Dafür spricht auch eine Stelle in den Acta Eruditorum vom Jahre 1685 pag. 400, welche lautet: „Desarguesius primus sectiones conicas universali quadam ratione tractare, ac propositiones multas sic enuntiare coepit, ut quaecunque sectio subintelligi posset.“

§. 5.

Desargues' Stellung in seiner Zeit.

Selten wol hat ein Gelehrter so widersprechende Beurteilung von Seiten seiner Zeitgenossen erfahren müssen, wie gerade Desargues.

Von den Grossen angestaunt und bewundert, ward er zu gleicher Zeit von den mittelmässigen Mathematikern, welche in ihrer conservativen Haltung jeder Neuerung in der Geometrie feindlich gegenüberstanden, mit Hass verfolgt, mit Beleidigungen und Schmähungen überschüttet, die bald Desargues jede Lust nahmen, seine eigenartigen gedankenreichen Arbeiten fernerhin zu veröffentlichen. So

---

1) Wir glauben im Vorhergehenden bestimmt nachgewiesen zu haben, dass Desargues tatsächlich der Schöpfer der Polarentheorie ist, die bisher dem De La Hire zugeschrieben wurde. Vergl. z. B. Dr. Lehmann; De La Hire und seine Sectiones Conicae, Abhandlung zum Jahresbericht des Kgl. Gymnasiums zu Leipzig auf das Schuljahr Ostern 1887 bis Ostern 1888, ebenso Ostern 1889 bis 1890; Cantor B. III. pag. 123.

erklärt es sich auch, dass er von dem Jahre 1644 an keine Schrift mehr erscheinen liess.

Schon sein erstes Werk, das über die Perspective handelte, hatte alsbald nach seiner Veröffentlichung gewissen Leuten Veranlassung gegeben, gegen die von Desargues auf diesem Gebiete eingeführte Neuerung der Coordinatenmethode [1]) zu protestiren.

So wurden mehrere Schriften verfasst, die zum Teil den Namen ihres Urhebers trugen, zum Teil anonym herausgegeben wurden. Ein heftiger Streit entbrannte und wurde mit grosser Leidenschaft auf beiden Seiten geführt.

Als Beispiel hierfür sei erwähnt, dass Desargues einem gewissen Curabelle die ungeheure Summe von 100000 Livres anbot, falls es ihm (Desargues) nicht gelingen sollte nachzuweisen, dass der Inhalt der Curabelle'schen Streitschrift zum Teil falsch, zum Teil verleumderisch sei.

Schliesslich wurden dann alle gegen Desargues erschienenen Schmähschriften in einem einzigen Bande vereinigt, der den Titel trug: „Abis charitable sur les diverses oeuvres et feuilles volantes du sieur Girard Desargues Lyonnais Paris 1642, chez Melchior Tavervier.“ [2]) und heute zu den grossen Seltenheiten gehört.

In dieser Sammlung befindet sich auch der Brief eines gewissen Beaugrand, Sekretär des Königs, der sich in seinem ersten Teil mit dem Brouillon Desargues', in seinem zweiten Teile aber mit Studien über den Schwerpunkt beschäftigt, indem er an eine Arbeit des letzteren über Mechanik anknüpft, die dem Kegelschnittswerk beigegeben war, heute aber nicht mehr vorhanden ist.

Der Eindruck, den man nun beim Lesen des Beaugrand'schen Briefes gewinnt, ist der, dass es diesem Secretär weniger darum zu

---

1) Bekanntlich beruht die Desargues'sche Methode, Gegenstände perspectivisch abzubilden einfach darin, dass die einzelnen Ecken derselben punktweise vermittelst ihrer Coordinaten dargestellt werden.

2) Uns lag ein Exemplar der Münchner Hof- und Staatsbibliothek mit der Signatur: 2^0. Arch. libr. 47$^m{}_8$ vor.

3) Als Beweis für Beaugrands Unfähigkeit zur Beurteilung mathematischer Dinge, führen wir nur folgende Tatsachen an: In dem oben bezeichneten Brief zeichnet er die Einführung der Doppelpunkte einer Involution für völlig überflüssig da dies alle jene selbst machen können, die die ersten Elemente des Euklid studirt haben". In seiner Geostatik behauptet der Secretär, dass das Gewicht eines Körpers, der sich dem Erdmittelpunkte nähert, abnehmen müsse.

tun war an dem Brouillon sachliche Kritik zu üben, wozu er auch keineswegs die Fähigkeit besass,[1]) als vielmehr durch eine spöttisch gehaltene Bemängelung der von Desargues allerdings zahlreich eingeführten Begriffe, wie Souche oder Involution, das Werk verächtlich zu machen und als das Product eines nicht mehr vollständig zurechnungsfähigen Mannes hinzustellen. Aehnlichen Charakter tragen alle übrigen gegen Desargues gerichteten Schmähschriften an sich.

Während nun die wichtigsten Originalarbeiten des grossen Gelehrten verloren gingen und erst nach langer Zeit teilweise wieder aufgefunden werden konnten, haben sich diese Ergüsse des Hasses und der Eifersucht bis auf den heutigen Tag erhalten.

Und gerade sie haben, wenn sie auch zu Desargues's Lebzeiten seinem Ruhm manchen Abbruch taten, dazu beigetragen, die Nachwelt auf den Gelehrten aufmerksam zu machen und manche seiner Entdeckungen zu überliefern.

Im Gegensatze zu diesen unerquicklichen Anfeindungen, die Desargues über sich ergehen lassen musste, steht die wichtige Tatsache, dass die Geistesheroen jener Zeit ihm ihre Hochachtung nach jeder Richtung hin bekundeten.

So schreibt z. B. Fermat an den P. Mersenne, der bekanntlich mit allen bedeutenden französischen Gelehrten jener Epoche in Beziehungen stand:

„Ich achte den Herrn Desargues sehr und zwar deshalb, weil er der selbständige Erfinder seiner Kegelschnittstheorie ist. Sein Büchlein, das, wie Sie sagen, als Jargon [1]) gilt, ist mir sehr verständlich und geistreich erschienen."

Ein nicht minder günstiges Zeugniss stellt ihm Carcavy in einem Briefe vom 22. Juni 1656, der an Huyghens gerichtet ist, aus: [2])

„Es ist wahr, dass Desargues einen Styl hat, der von dem der anderen Geometer etwas abweicht. Da er aber die Werke derselben nur wenig gelesen hat, seine Gedanken ihm allein entsprungen sind, und er die Dinge allgemeiner fasst, wie die anderen Geometer, so muss man ihn entschuldigen und aus dem wenigen, das er uns gegeben hat, Nutzen ziehen, der freilich ein grösserer sein würde, wenn Desargues seine Gedanken in anderer Reihenfolge entwickelt hätte."

---

1) So drückt sich Beaugrand in seinem Briefe aus.

2) Ch. Henry: Intermédiance de Carcavy, de Fermat, Pascal et Huyghens. Bull. di Bibliographia et di storia, B. Boncompagni tome 17. S. 330.

Statt noch mehr solcher Stellen anzuführen, weisen wir darauf hin, dass Desargues mit dem berühmten Philosophen und Mathematiker Descartes in inniger freundschaftlicher Beziehung stand, die hauptsächlich in der wissenschaftlichen Tüchtigkeit des ersteren ihre Begründung hatte. Auch versäumt Descartes keine Gelegenheit diese seine Hochschätzung Desargues gegenüber auszusprechen.[1]) Das Bewusstsein der Wertschätzung von Seite solcher Männer, die wie z. B. Descartes nur äusserst sparsam in der Erteilung von Lobsprüchen waren, musste den Gelehrten entschädigen für die vielen Angriffe und Beleidigungen anderer.

Wie es bei neu auftretenden Gedanken immer geht, so waren es eben nur wenige, die Desargues' Ideenflug zu folgen vermochten. Der wesentlichste Grund hiefür liegt wol in seinen Werken selbst, denn sie unterscheiden sich sowol im Styl als auch im Inhalt von allen mathematischen Schriften jener Zeit.'

Obwol seit Vieta eine bedeutende Besserung der algebraischen Bezeichnungs- und Rechnungsweise eingetreten war bediente sich dennoch Desargues beständig derjenigen der Alten, da er diese allein kannte. Auch Decartes hat ihm diesen Mangel vorgehalten, indem er an seinen Freund schreibt:[2])

„Um Jhre Beweise einfacher zu gestalten, wäre es nicht übel angebracht Termen und arithmetische Rechnungsweisen anzuwenden, sowie ich das in meiner Geometrie gemacht habe. Denn es gibt viel mehr Leute, welche wissen, was Multiplication ist, als solche, die verstehen, was ein zusammengesetztes Verhältniss bedeutet."

Die Klarheit, namentlich des Kegelschnittswerkes, wurde aber auch dadurch wesentlich beeinträchtigt, dass weder eine Einteilung nach Capiteln vorhanden, noch eine logische Aufeinanderfolge in den Entwicklungen eingehalten ist.

Ausserdem mussten die scheinbar willkürlichen Definitionen, wie z. B. bei der Involution, und die nicht immer genügend begründete Notwendigkeit der Einführung neuer Gedanken und Betrachtungen einen nicht sehr geschulten Leser abschrecken.

Ferner hatte zwei Jahre vor dem Erscheinen des Brouillon Descartes seine Geometrie herausgegeben, die die Aufmerksamkeit der damaligen Mathematiker sehr bald von den Methoden ablenkte, die

1) Vergleiche z. B. Descartes' Briefwechsel.

2) Lettres de Descartes, Edit Cousin, pag. 88. tome 8. Brief vom 4. Januar 1639. Aehnlich pag. 214. tome 8.

durch die griechischen Mathematiker des goldenen Zeitalters angebahnt und seit etwa zwei Jahrtausenden verfolgt worden sind.

Doch ganz ohne fruchtbaren Einfluss blieben Desargue's neue Gedanken keineswegs. Vielmehr befanden sich unter seinen Schülern Männer, die nach ihren Geisteseigenschaften befähigt waren, die so neuen Anregungen ihres Meisters aufzunehmen und weiter auszubilden. Ein solcher war Abraham Bosse, der später auf der Pariser Hochschule die Perspective und den Steinschnitt lehrte und 1666 lieber seiner Professur entsagte, als dass er der Methode des Desargues abgeschworen hätte, wie das von ihm verlangt wurde. Auch De La Hire, der Vater des berühmten Gelehrten gleichen Namens, von dem wir noch weiter unten sprechen werden, befand sich im Schülerkreis unseres Mathematikers. Der bedeutendste unter allen aber war Blaise Pascal der Jüngere. Geboren im Jahre 1623, fand er mit 16 Jahren jenen berühmten Satz, der nach ihm den Namen trägt.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass dieser Satz den Studien bei Desargues entsprungen ist, indem Pascal selbst sagt, [1] „dass er, soweit es ihm möglich war, versucht habe, Desargues nachzuahmen."

In seinem Essay pour les coniques finden wir die Definition des Strahlenbüschels mit derselben Bezeichnung wie bei Desargues (ordre de lignes, ordonnance de lignes) und ausserdem den Satz vom Kegelschnitt dem ein Vierseit eingeschrieben ist, aufgeführt. Ueber dieselbe Schrift äussert sich Decartes wie folgt: [2]

„Ich habe auch den Essay des jungen Pascal über die Kegelschnitte bekommen, und bevor ich noch die Hälfte desselben durchgelesen hatte, erkannte ich, dass Pascal von Desargues gelernt hat, was er mir auch sofort einräumte"

Auch hält er es an einer anderen Stelle für nicht glaubwürdig, dass ein 16 jähriger Jüngling einen so wichtigen Satz, wie der Sechsecksatz ist, habe finden können.

In der Tat ist es leicht möglich, aus zwei Sätzen des Desargues den von Pascal abzuleiten. Wir teilen diesen Beweis mit, da vielleicht Pascal einen ähnlichen Weg eingeschlagen hat. (Siehe Fig. 12.)

Das Vierseit 1264 mit den Diagonalen 24 und 16 werde von der Transversale G in den Punkten $aa_1 - bb_1$ geschnitten. Eben-

1) Essay pour les Coniques pag. 184. tome III.

2) Lettres de Descartes pag. 201. tome 8, Brief vom 11. Juni 1640.

dieselbe trifft einen beliebigen Kegelschnitt, der durch 1, 2, 4, 6 gelegt ist, in den Punkten cc_1.

Nun bilden aber die Paare $aa_1 - bb_1 - cc_1$ eine Involution, die wir von 4 auf den Kegelschnitt projiciren wollen, und erhalten dadurch die Punktepaare $23 - 56 - ce$, deren Verbindungslinien durch einen einzigen Punkt 0 auf G laufen müssen. (Vergl. Satz 7 auf Seite 135.) Betrachten wir in der Figur das Sechseck 1 2 3 4 5 6, so schneiden sich offenbar seine Gegenteiten in drei Punkten einer Geraden G, womit der Pascal'sche Satz bewiesen [1]) ist.

12 und 45 schneiden sich in a_1

23 und 56 schneiden sich in 0

34 und 61 schneiden sich in b_1

Auch Fermat, der wie wir schon sahen, Desargues' Bedeutung zu würdigen wusste, scheint sich eingehend mit der Involution desselben beschäftigt zu haben. Denn in seinem Nachlasse befinden sich zwei specielle Fälle des Satzes vom Kegelschnitt mit dem eingeschriebenen Vierseit. Den einen hat bereits Herr Cantor in seiner Geschichte der Mathematik angeführt [2]) und bemerkt, dass in ihm die jetzt gebräuchliche Definition der Involution enthalten sei, wenn auch jener Kunstausdruck nicht genannt und gebraucht sei. [3])

Der fragliche Satz lautet:

Verbindet man einen beliebigen Punkt b eines Kreises mit den Endpunkten m und n einer Sehne, so erhält man auf dem zu mn parallelen Durchmesser pp_1 die Punkte qr_1 und durch Annahme des Punktes c zwei weitere q_1r.

Dann besteht folgende Beziehung:

$$\frac{pq \cdot p_1r_1}{pr_1 \cdot p_1q} = \frac{pr \cdot q_1p_1}{pq_1 \cdot p_1r} \quad \text{(Fig. 13)}$$

---

1) Bekanntlich ist dieses Theorem bereits in den: Pappi Alexandrini mathematicae collectiones im 141 und 143ten Satz des 8. Buches für den Fall enthalten, dass der Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt.

2) Cantors Vorlesungen II. Band p. 606 und pag. 620. Hierzu ist zu bemerken, dass Désargues gerade jener allgemeinen Beziehung (Gleichung III auf Seite 124 dieser Arbeit) den Namen Involution beilegte, während er mit der Constanz des Rechtecks den Arbre definirt.

3) Oeuvres de Fermat. Henry-Tanery B. I. pag. 79.

Als Porisma wird der Satz, der allerdings die allgemeine Involutionsbedingung darstellt, beweislos angegeben und noch beigefügt, dass es unschwer sei, denselben auf Ellipsen, Hyperbeln und Gegenschnitte auszudehnen.

Diesem Porisma geht ein anderes voraus, das ebenfalls als specieller Fall des allgemeinen Desargues'schen Satzes zu betrachten ist, was bisher noch nicht bemerkt wurde.[1])

In einer Parabel sei der Durchmesser $0\overset{\infty}{0}_1$ gezogen. (S. Fig. 14).

Verbindet man 2 Punkte M und N mit zwei festen A und B, so erhält man auf dem Durchmesser Punktepaare $aa_1 - bb_1$, welche der folgenden Relation genügen:

$$\frac{0a}{02} = \frac{0b_1}{0a_1} \quad \text{oder} \quad 0a \,.\, 0a_1 = 0b \,.\, 0a_1$$

Dies bedeutet aber, dass 0 die Souche der Involution $aa_1 - bb_1$ ist. Diese entspricht aber dem Punkte $\overset{\infty}{0}_1$. Somit hätte man die Sechspunktinvolution $aa_1 - bb_1 - 0\overset{\infty}{0}_1$.

Wenn man erwägt, dass Fermat Desargues' Schrift über die Kegelschnitte gekannt hat und ihr auch seinen Beifall nicht versagte, so ist die Vermutung, dass er durch jenen auf die obigen Sätze gekommen ist, keine unberechtigte. Unbeschadet dessen besteht neben dieser Annahme auch die Möglichkeit, dass Fermat bei seinen ausgedehnten Studien über Apollonius, hauptsächlich aber über die Porismen des Euklid, selbst auf diese verhältnissmässig wenig bedeutenden Sätze stiess.

Da sich aber die beiden Theoreme, wie schon bemerkt, erst im Nachlasse des Fermat vorgefunden haben,[2]) so muss man wenigstens zugeben, dass der fragliche Fundamentalsatz von Desargues zuerst veröffentlicht worden ist. So nennt auch Pascal,[3]) der diesen Satz anführt, nur Desargues als den Entdecker des Satzes vom Kegelschnitt mit dem eingeschriebenen Vierseit.

---

1) Oeuvres de Fermat. Ed. Henry-Tanery 1891. tome I. pag. 79.

2) Somit erst 25 Jahre nach dem Erscheinen des Brouillon! Siehe auch Chasles Aperçu historique § 25. II. Capitel.

3) Oeures complètes de Pascal: Ed. Librairie de L. Hachette et Cie, Essay pour les Coniques. tome III. pag. 184.

§ 6.

Einfluss der Arbeiten Desargues' auf die Entwicklung der projectivischen Geometrie in späterer Zeit.

Da das wichtigste Werk Desargues', das über die Kegelschnitte, vielleicht infolge der geringen Auflage oder schweren Lesbarkeit desselben bald gänzlich verschwand, so wäre der Name unseres Gelehrten als eines hervorragenden Geometers wol ganz in Vergessenheit geraten, wenn nicht, wie schon früher bemerkt, jene Schmähschriften ihn der Nachwelt überliefert hätten. Umsomehr ist es zu begrüssen, dass der französische Mathematiker Philipp De La Hire, der von 1640—1718 lebte, [1]) im Jahre 1679 eine eigenhändige Abschrift des „Brouillon project" von Desargues, fertigte, die dann Chasles nach weiteren 165 Jahren, im Jahre 1845 wieder auffand. Was De La Hire zu diesem eigentümlichen Verfahren veranlasste, dürfte kaum mehr zu ermitteln sein, dagegen hat die Kenntniss dieses Werkes unzweifelhaft Einfluss auf seine so berühmt gewordenen, geometrischen Arbeiten ausgeübt, wenn er auch in einem seiner Abschrift beigegebenen Briefe dies nicht zum Ausdruck bringt. [2]) Mit dieser unserer Anschauung stehen wir keineswegs allein, sondern es findet sich bereits in den Acta Eruditorum vom Jahre 1685 auf pag. 400 eine Bemerkung, welche bei Gelegenheit der Recension des im gleichen Jahre erschienenen Werkes von De La Hire: „Sectiones Conicae in novem libros distributae (fol., Parisiis 1685, apud Steph. Michallet.) gemacht wird, und welche lautet:

Cum nihil de his Pascalii, Desarguesii aut pauca sint edita, eo gratior fuit labor doctissimi geometrae Ph. de La Hire, qui v e s t i g i i s i s t o r u m i n s i s t e n s, multaque perpulchraque de suo adjiciens, jam ante 12 annos libellum titulo Novae methodi sectiones conicas et cylindricas explicandi edidit . . . [3])

Ein genauer Vergleich des genannten Werkes mit der Desarguesschen Schrift macht, wie wir sehen werden, diese Beeinflussung unzweifelhaft.

Nun hatte aber De La Hire bereits im Jahre 1673, also 3 Jahre bevor er nach seiner Angabe Desargues' Kegelschnittstheorie zum

---

1) Vergleiche hierüber Cantor B. III, pag. 120 ff.

2) Desargues I. pag. 231, 232.

3) Diese Stelle findet sich in Chasles' Aperçu historique, deutsche Ausgabe von Sohnke pag. 85.

ersten Male las, ein Werk mit dem Titel „Nouvelle Méthode en Géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques" veröffentlicht. In derselben gibt er eine Methode an, um einen Kreis in einen Kegelschnitt punktweise zu transformiren.

Fast genau dieselbe Construction fanden wir bei der Desargues, als wir die von ihm gegebenen Vorschriften durch eine Zeichnung veranschaulichten. [1]) Der einzige Unterschied besteht darin, dass Desargues die Elemente des Kegelschnittes aus dem Grundkreis des Kegels, also räumlich ableitet, während De La Hire Kreis und Kegelschnitt in einer und derselben Ebene sich vorstellt. [2]) Aber auch Desargues hatte schon, wie wir Seite 138 sahen, die Bemerkung gemacht, dass derartige räumliche Figuren unmittelbar in der Ebene gedeutet werden dürfen. Dieser Umstand hindert jedoch nicht, De La Hire's Worten betreffs der erstmaligen Lectüre dem Desargues'schen Kegelschnitte Glauben zu schenken, denn er kann die Kenntniss von dieser Methode sehr wol durch seinen Vater bekommen haben, der ein Schüler Desargues' war.

Bei der Abfassung des schon citirten Werkes vom Jahre 1685 kannte nun aber De La Hire, wie er selbst sagt, den Brouillon project, und hat aus diesem unzweifelhaft den Gedanken zur Aufstellung seiner Polarentheorie und zur Ableitung der allgemeinen Kegelschnittseigenschaften aus dem Kreise durch Raumprojection geschöpft.[3])

Die Tragweite der Sechspunktinvolution jedoch erkannte er nicht, indem er dieselbe als unbequem bezeichnet und nur die Vierpunktsinvolution, die er im Anschluss an Pappus die harmonische Teilung nennt, aufgreift. Aber schon Desargues hatte, wie wir zeigten, alle Eigenschaften von Pol und Polare mit Zuhilfenahme derselben Punktelage abgeleitet. Sein Standpunkt war sicherlich ein allgemeinerer als der des De La Hire, indem er aus seiner Sechspunktinvolution den nach ihm benannten Satz gewann, der die Quelle so wichtiger Theoreme wurde, während De La Hire bei seiner engeren Auffassung dieses Instrument vollständig entbehren musste.

---

1) Siehe S. 137 dieser Arbeit. Siehe auch Fig. 10b.

2) Vergleiche hierüber Cantor B. III. pag. 120, 121, wo die Methode genauer auseinander gesetzt wird.

3) Oldenburg spricht in einem Briefe an Leibniz mit Achtung von einer Desargues'schen Methode, womit jedenfalls die Projectionsmethode genannt ist. Dieselbe soll auch dem Pascal'schen Werke zugrunde gelegen haben, welche den Satz vom hexagrammum mysticum enthalten hat.

Dagegen muss dem letzteren das Verdienst zugesprochen werden, dass er einerseits aus der dunklen Darstellung Desargue's die Wichtigkeit der Polarentheorie zu erkennen vermochte, andererseits dieselbe in überaus klarer und nicht unselbständiger Weise entwickelte. Diese vorzügliche Darstellungsweise, die überhaupt De La Hire's Schriften auszeichnet, verschaffte diesem und damit indirect auch Desargues' Ideen Einfluss auf die weitere Entwicklung der Geometrie.

So verbreitete sich die Kenntniss der Polarentheorie in England durch das Schriftchen von Jacob Milnes: Sectionum Conicarum Elementa, Oxford 1702, das aber De La Hire als den Begründer derselben bezeichnet. Aehnlich behandelt Robert Simson im 12ten Satze des 5ten Buches ferner Treatise on Conic Sections 1735 das Desargues'sche Theorem, welches durch den Essay pour les Coniques des Pascal bekannt geworden war. [1]) Geradezu zum Fundament einer Arbeit [2]) über die Kegelschnitte machte dieses Brianchon. Auch reproducirte Servois [3]) den Satz von den perspectivisch liegenden Dreiecken, den auch Brianchon, Sturm, Gergone und Poncelet, welch' letzterer durch ihn auf die Theorie von den homologen Figuren geführt wurde, anwendeten.

Das Verdienst, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf Desargues wieder gelenkt zu haben, gebührt hauptsächlich Poncelet. Auf Grund des Descart'schen Briefwechsels und des Briefes von Beaugrand sieht er sich veranlasst auf die Bedeutung dieses Gelehrten hinzuweisen, den er treffend den Monge seines Jahrhunderts nennt. [4])

Doch war eine eingehende Würdigung der Verdienste Desargues erst möglich, nachdem Chasles im Jahre 1845 die De La Hire'sche Abschrift des Brouillon project aufgefunden hatte. Chasles' eigene Untersuchungen über die Involution, die er in der Note XV zu seinem Aperçu historique zum ersten Mal veröffentlichte, sind jedenfalls selbständig durchgeführt, indem das letztgenannte Werk bereits 1837, also 8 Jahre vor Auffindung des Brouillon project publicirt worden

---

1) Pascal: Essay pour les Coniques pag. 184, tome II.

2) Brianchon: „Mémoire sur les lignes du deuxième Ordre. Paris 1817. (Rachelier.)

3) Servois: Solutions peu connues . . . Metz 1805.

4) Siehe die Einleitung zu Poncelet's: Traité des propriétés projectives des figures.

ist. Dagegen kannte Chasles schon damals, aus dem Briefe Beaugrands, den Satz vom Kegelschnitt und dem eingeschriebenen Vierseit, welcher ihm das Mittel an die Hand gab, von der involutorischen Beziehung zu dem allgemeinen Princip der Projectivität überzugehen. Chasles zeigte nämlich als der Erste, dass obengenanntes Theorem unmittelbar den Satz ergibt, dass zwei projectivische Strahlenbüschel einen Kegelschnitt erzeugen. [1])

---

1) Chasles: Aperçu historique, Deutsch von Sohncke pag. 349.

2) Zu S. 133 Z. 3 v. unt. Desargues construirt also die Polare eines Punktes inbezug auf einen Kegelschnitt in der heute noch üblichen Weise.

3) Zu S. 142 Z. 12 v. unt. Descartes meint offenbar die Anwendung des Transversalensatzes von Menelaos in der Form mit den zusammgesetzten Verhältnissen.

III.

Untersuchungen und Lehrsätze über Begrenzungscurven.

Von

C. W. Meyer,

Ingenieur in Lauchhammer.

---

§ 1.

Die folgenden Untersuchungen erstrecken sich auf die Beziehungen und Lehrsätze, die sich ergeben, wenn man auf dem rechtwinkligen Coordinaten-System vom Anfangspunkt 2 Linien abträgt, m auf der Ordinaten-, n auf der Abscissenachse; und zwischen beiden ein bestimmtes Verhältniss derart festsetzt, dass man dasselbe allgemein durch die Formel

$$m^z + n^z = S^z$$

ausdrücken kann, worin S eine gegebene constante Länge ist. z ist ein variabler Exponent, für den wir successive alle erdenklichen Werte einsetzen können. Verbindet man nun die Endpunkte von m und n durch eine Gerade, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, worin die letztere Hypotenuse ist.

Dies Dreieck kann dann innerhalb der durch die Formel

$$m^z + n^z = S^z$$

gegebenen Grenzen die verschiedensten Formen annehmen. Es beginnt als Linie auf der Ordinaten-Achse, wo dann

$$m = S, \quad n = 0$$

durchläuft eine Symmetrieform unter 45°, wo $m = n$ und das Dreieck gleichschenklig ist, und endigt als Linie auf der X Achse, wo $n = S$ und $m = 0$. Denkt man sich nun alle diese Dreiecke in unendlich naher Succession aufgezeichnet, so werden die Hypotenusen derselben eine Continuität von Schnittpunkten miteinander bilden, die einer mathematisch bestimmbaren Curve angehören, die bei q beginnt und in p endigt. Die Curve hat demnach die Eigenschaft, mit jeder solchen Hypotenuse einen Punkt gemeinsam zu haben; diese ist also Tangente an jene. In Folge dessen schliesst die Curve den gesammten Raum ein, welcher von der Succession jener verschiedenen Dreiecke ausgefüllt wird und zwischen den Achsen liegt. Ich nenne sie deshalb Begrenzungscurve.

Es leuchtet ein, dass jedem Grade der Gleichung

$$m^z + n^z = S^z$$

auch eine besondere Begrenzungscurve entspricht. Im Folgenden sollen mehrere dieser Curven bestimmt und genauer untersucht werden. Dabei wird sich ergeben, dass der allgemeinen Formel

$$m^z + n^z = S^z$$

(die wir Katheten-Formel oder -Gleichung nennen wollen) auch eine eben solche allgemeine Formel der Begrenzungscurve (Coordinaten-Gleichung) entspricht.

§ 2.

Es läge nahe, zuerst den Exponent $z = 1$ zu nehmen und also die Katheten-Gleichung

$$m + n = S$$

zu behandeln. Allein das Weitere wird lehren, dass man zweckmässig mit $z = 2$ beginnt, wobei wesentlich der Umstand in's Gewicht fällt, dass für den Fall

$$m^2 + n^2 = S^2$$

„dann auch die Hypotenusen aller successiven Dreiecke constant $= S$ sind“, während diese in allen andern Fällen in ihrer Länge variiren. Hieraus erhellt, dass S, zwischen den Achsen, mit seinen Endpunkten auf diesen gleitend, durch alle möglichen Lagen hindurch geführt, immer Tangente an die Begrenzungscurve bleibt. Da nun bekanntlich bei der angegebenen Bewegung von S jeder feste Punkt darauf eine Ellipse (d. h. im ersten Quadranten ein Viertel derselben) beschreibt, so lässt sich schon hieraus schliessen, dass

1) die Begrenzungscurve auch jede solche Ellipse tangirt,

2) überhaupt zwischen beiden Curven mannichfache Beziehungen bestehen werden.

Vor dem Eintritt in die Untersuchung noch 2 Bemerkungen:

Da im Laufe derselben viele 3te Wurzeln vorkommen, so habe ich es praktisch befunden, zur Vereinfachung der Schreibweise die dritte Wurzel immer durch einen doppelten Strich über dem Wurzelzeichen auszudrücken; also statt $\sqrt[3]{x}$ werde ich schreiben $\sqrt{\bar{\bar{x}}}$. Ferner werde ich es tunlichst vermeiden, mich der Differential-Rechnung zu bedienen, um einerseits zu zeigen, wie selbst complicirte Probleme, am richtigen Ende angefasst, auch mit den gewöhnlichen Mitteln der Analysis gelöst werden können; andererseits das Nachfolgende auch denen verständlich zu machen, die die Differential-Rechnung nicht kennen. Zur Aufsuchung der Maxima und Minima werde ich die Methode der Behandlung arithmetischer Proportionen (oder sog. Ungleichungen) benutzen, deren Wesen bis auf einen Punkt mit der Behandlung der Gleichungen völlig übereinstimmt. Dieser Punkt ist der, dass die Vorzeichen beider Seiten nicht durch Division bzhw. Multiplication oder Radiciren bzhw. Potenziren geändert werden dürfen, sondern nur durch beiderseitige Addition oder Subtraction. Denn es ist z. B. $-2 > -3$; wollte ich aber quadriren, so erhielt ich $4 > 9$. Dagegen kann ich beiderseits 4 addiren und erhalte $2 > 1$. Diese Manipulation mit den arithmetischen Proportionen enthält zwar eigentlich schon die Grundelemente des Differentiirens, ist aber ohne weitere Erklärung Jedem verständlich. Will man aber quadriren, so muss man negative Grössen zuerst durch Hinüberschaffen auf die andre Seite positiv machen, oder sich Gewissheit verschaffen, dass auf derselben Seite noch ein grösserer positiver Ausdruck steht, der einen positiven Wert der ganzen Proportionsseite garantirt. Unter Beachtung dieser Regeln jedoch leistet das Verfahren nahezu ebensoviel wie das Differentiiren.

§ 3.

Um die Begrenzungscurve zu finden, beachte man in erster Linie den Umstand, dass jeder Punkt derselben in welchem sie eine Dreieckshypotenuse tangirt, dadurch charakterisirt ist, dass er ein **äusserster** Punkt dieser Hypotenuse ist. Das will sagen: Jeder andre Punkt der betr. Hypotenuse liegt ausserdem noch auf einer oder mehreren anders geneigten Hypotenusen S, die sich hier mit Ersterer

kreuzen. Dieser Punkt jedoch liegt auf keiner andern mehr, sondern nur auf dieser einen, er ist ein Grenzpunkt für den durch die Succession der Hypotenusen gebildeten Raum. „Mithin ist hier für ein gewisses festes x das zugehörige y ein Maximum".

In nebenstehender Figur ist, ein für alle Mal, bei allen beliebigen Exponenten der Kathetengleichung:

$$y \cdot n + x \cdot m = m \cdot n$$

Ferner ist

$$m^2 + n^2 = S^2, \quad m^2 = S^2 - n^2$$

also

$$y \cdot n + x \cdot \sqrt{S^2 - n^2} = n \cdot \sqrt{S^2 - n^2} \tag{I}$$

$$y = \frac{(n - x)\sqrt{S^2 - n^2}}{n}$$

Soll nun O ein Punkt der Begrenzungscurve sein, so muss der letztere Ausdruck ein Maximum darstellen; d h. wenn in der durch denselben repräsentirten Function von x eine Grösse variirt wird, so muss allemal y, d. h der ganze Wert des Ausdrucks kleiner werden. In demselben ist S eine constante Grösse, ebenso hatten wir x als unveränderlich angenommen. Bleibt also nur n als variabel übrig, das wir daher als $n \pm z$ einsetzen. Dann muss folgende arithmetische Proportion entstehen:

$$\frac{(n - x)\sqrt{S^2 - n^2}}{n} > \frac{(n - x \pm z)\sqrt{S^2 - n^2 \mp 2zn - z^2}}{n \pm z}$$

Wir können hier z als so kleinen Wert annehmen, dass $n - z$ immer positiv bleibt; gleicherweise bedingt es das rechtwinklige Dreieck, dass n immer $< S$ und $\sqrt{S^2 - n^2}$ immer einen reellen Wert hat. Demnach kann obige Proportion quadrirt werden. Dann ist:

$$\frac{(n-x)^2(S^2-n^2)}{n^2} > \frac{[(n-x)^2 \pm 2z(n-x) + z^2](S^2 - n^2 \mp 2zn - z^2)}{n \pm 2zn + z^2}$$

Für das nun folgende Verfahren eine kurze Erläuterung. Es wird sich zeigen, dass beim Fortschaffen der Nenner und Auflösen der Klammern sämtliche Glieder auf beiden Seiten, welche kein z als Factor erhalten, sich gegenseitig aufheben. Die Uebrigbleibenden haben alle z oder höhere Potenzen davon und also kann durch z dividirt werden. Nachher setzen wir $z = 0$ und es fallen somit alle Glieder fort, welche im Anfang z^2 oder eine noch höhere Potenz von z zum Factor haben.

Wir können uns mithin die ganze Rechnung sehr vereinfachen, wenn wir dieses Resultat vorweg nehmen und alle Glieder mit z^2 und höher, oder diese selbst einfach weglassen. Dann lautet unsre obige Gleichung:

$$\frac{(n-x)^2(S^2-n^2)}{n^2} > \frac{[(n-x)^2 \pm 2z(n-x)](S^2-n^2 \mp 2zn)}{n^2 \pm 2zn}$$

$$(n^2 \pm 2zn)(n-x)^2(S^2-n^2) > n^2[(n-x)^2 \pm 2z(n-x)](S^2-n^2 \mp 2zn)$$

$$\pm 2zn(n-x)^2(S^2-n^2) > \pm 2zn^2(n-x)(S^2-n^2) \mp (2zn^2(n-x)^2$$

dividire durch $2z(n-x)n$

$$\pm(n-x)(S^2-n^2) > \pm n(S^2-n^2) \mp n^2(n-x)$$

Wenn nun $z = 0$ wird, was Voraussetzung war, so verschwindet die Ungleichheit beider Seiten und ebenso die doppelten Vorzeichen — welche man behalten will, ist gleichgültig, weil sie sich jetzt beliebig auf die andere Seite bringen lassen.

Dann ist aber

$$(n-x)(S^2-n^2) = n(S^2-n^2) - n^2(n-x)$$

oder

$$n^2(n-x) = (S^2-n^2)x$$

$$n^3 - xn^2 = S^2x - xn^2$$

oder

$$n^3 = S^2x, \quad n = \sqrt[3]{S^2x}$$

Führen wir diesen Wert in die obige Gleichung (I) ein, so ist:

$$y\sqrt[3]{S^2x} + x\sqrt{S^2 - \sqrt[3]{S^4x^2}} = \sqrt[3]{S^2x}\sqrt{S^2 - \sqrt[3]{S^4x^2}}$$

Hier lässt sich durch $\sqrt[3]{S^2x}$ dividiren:

$$y + \sqrt[3]{x^2}\sqrt{\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{S^2}\sqrt{\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}}$$

$$y = \sqrt{\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}}\,(\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}) = \left(\sqrt{\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}}\right)^3$$

quadrire:

$$y^2 = (\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2})^3 \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2} \quad \text{und}$$

$$\underline{\underline{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{S^2}}}$$

Dies die endgültige Gleichung der gesuchten Begrenzungscurve, deren Formel von einer frappanten Einfachheit ist.

§ 4.

Wir suchen zunächst den correlativen Wert von m auf der Y-Achse. Da

$$n = \sqrt[3]{S^2 x}$$

so ist

$$m^2 = S^2 - \sqrt[3]{S^4 x^2} = \sqrt[3]{S^4} \left(\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) = \sqrt[3]{S^4 y^2}$$

und somit

$$m = \sqrt[3]{S^2 y}$$

Demnach verhalten sich m und n wie $\sqrt[3]{y}$ und $\sqrt[3]{y}$ oder mit andern Worten: „Die Katheten auf den Achsen verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus den Coordinaten des auf der Hypotenuse liegenden Punktes der Begrenzungscurve." Ist diese Hypotenuse, wie oben ausgeführt, zugleich Tangente an dieselbe, so hat der Tangentenwinkel mit der X Achse die

$$\mathrm{tg} = - \frac{\sqrt[3]{S^2 y}}{\sqrt[3]{S^2 x}} = - \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

und die Tangentengleichung müsste lauten:

$$y - y_1 = - \sqrt[3]{\frac{y_1}{x_1}} (x - x_1)$$

Um dies zu beweisen, suchen wir nunmehr die Gleichung der Tangente von der Secante aus auf. In die allgemeine Gleichung einer Linie durch 2 gegebene Punkte ist ein entsprechender Wert einzuführen. Dies geschieht wie folgt:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n} (x - x_1)$$

Der Factor $\frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n}$ lässt sich zerlegen in

$$\frac{\left(\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_n}\right)\left(\sqrt[3]{y_1^2} + \sqrt[3]{y_1 y_n} + \sqrt[3]{y_n^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_n}\right)\left(\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1 x_n} + \sqrt[3]{x_n^2}\right)}$$

Ferner ist

$$\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{y_1^2} = \sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{y_n^2}$$

oder

$$\sqrt[3]{x_1^2} - \sqrt[3]{x_n^2} = - \left(\sqrt[3]{y_1^2} - \sqrt[3]{y_n^2}\right)$$

und

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_n})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_n}) = -(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_n}))\sqrt{y_1} + \sqrt{y_n})$$

$$\frac{\sqrt{y_1} - \sqrt{y_n}}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_n}} = -\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_n}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{x_n}}$$

Diesen Wert führen wir in obige Formel ein, die dann lautet:

$$y - y_1 = -\frac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_n})(\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_1 \, y_n} + \sqrt{y_n^2})}{(\sqrt{y_1} + \sqrt{y} \quad ((\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_1 \, x_n} + \sqrt{x_n^2}}(x - x_1)$$

Nunmehr lasse ich beide Punkte der Secante zusammenfallen, so dass $x_1 = x_n$ und $y_1 = y_n$, dann ist

$$y - y_1 = -\frac{2\sqrt{x_1} \, . \, 3\sqrt{y_1^2}}{2\sqrt{y_1} \, . \, 3\sqrt{x_1^2}}(x - x_1) = -\sqrt{\frac{y_1}{x_3}}(x - v_1)$$

Woraus erhellt, dass die Hypotenuse S in der Tat Tangente an die Begrenzungscurve ist.

Wenn wir uns nun des Umstandes erinnern, dass jeder Punkt auf der Hypotenuse S bei Verschiebung derselben zwischen den Achsen eine Ellipse beschreibt, deren halbe Achsensumme $= S$ ist, so wird klar, dass der obere Abschnitt auf S, der durch den Punkt marquirt wird, der halben grossen Achse a, der untere Abschnitt der halben kleinen Achse b gleich sein muss. Der Punkt 0 ist mithin der Ellipse und Begrenzungscurve gemeinsam. Die Frage ist nur noch die: Welcher Lage von S, bzhw. dadurch des Punktes 0 entspricht die durch a und b bestimmte Ellipse? Oder: welches ist die Beziehung zwischen den Coordinaten in 0 und den Abschnitten a und b? Diese ergibt sich aus nebenstehender Figur:

$$y^2 + (n - x)^3 = b^2$$

$$y^2 + \sqrt{x^2}\,(\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2})^2 = b^2$$

$$y^2 + \sqrt{x^2 y^4} = b^2$$

$$\sqrt{y^4}(\sqrt{y^2} + \sqrt{x^2}) = \sqrt{S^2 y^4} = b^2$$

$$\underline{b = \sqrt{Sy^2}}$$

ebenso

$$x^2+(m-y)^2 = a^2 = x^2 + \sqrt[3]{y^2}(\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{y^2})^2$$

$$x^2+\sqrt[3]{y^2 x^4} = \sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}) = \sqrt[3]{S^2 x^4} = a^2$$

$$\underline{a = \sqrt[3]{Sx^2}}$$

Demnach

$$\underline{a : b = \sqrt[3]{x^2} : \sqrt[3]{y^2} = n^2 : m^2}$$

Die Abschnitte, in welche der Berührungspunkt die Tangente S zerlegt, verhalten sich, wie die Quadrate der Katheten auf den Achsen. Nun ist ferner:

$$\left.\begin{aligned} m : b &= \sqrt[3]{S^2y} : \sqrt[3]{Sy^2} = \sqrt[3]{S} : \sqrt[3]{y} \\ b : y &= \sqrt[3]{Sy^2} : \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{S} : \sqrt[3]{y} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \underline{m : b = b : y}$$

$$\left.\begin{aligned} n : a &= \sqrt[3]{S^2x} : \sqrt[3]{Sx^2} = \sqrt[3]{S} : \sqrt[3]{x} \\ a : x &= \sqrt[3]{Sx^2} : \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{S} : \sqrt[3]{x} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \underline{n : a = a : x}$$

Die Ellipsen-Achsen sind also die mittleren Proportionalen zwischen dén Tangenten-Abschnitten auf den Achsen und den betr. Coordinaten des Berührungspunktes mit der Begrenzungscurve.

Es ist nun leicht zu beweisen, dass die Tangente an die Begrenzungscurve zugleich in demselben Berührungspunkte auch Tangente an die zugehörige Ellipse ist; mithin der Berührungspunkt allen 3 Linien gemeinsam ist. Zu dem Behufe bestimmen wir x und y nach a und b. Es ist

$$a = \sqrt[3]{Sx^2}, \quad \text{also} \quad x^3 = Sx^2$$

$$x = a\sqrt{\frac{a}{S}} = \underline{a\sqrt{\frac{a}{a+b}}}$$

ebenso

$$b = \sqrt[3]{Sy^2}, \quad \underline{y = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}}$$

aus welchen Werten sich ferner ergibt, dass die Quadrate der Coordinaten sich verhalten, wie die Kuben der Hypotenusen-Abschnitte. Auch gestatten diese Formeln, zu jeder Ellipse den ihr zugehörigen Begrenzungspunkt durch geometrische Construction zu finden, indem

$$S : a = a^2 : x^2$$

Ist nun dieser Punkt mit obigen Coordinaten zugleich Ellipsenpunkt und auf derselben Tangente gelegen, so müssen obige Werte, in die Gleichung der Ellipsen-Tangente eingesetzt, dieser eine Form geben, dass deren Winkeltangente mit der X-Achse

$$= -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}$$

ist. Die Ellipsentangente hat die Gleichung:

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$$

also mit obigen Werten:

$$a^2 y b \sqrt{\frac{b}{a+b}} + b^2 x a \sqrt{\frac{a}{a+b}} = a^2 b^2$$

dividire durch $ab\sqrt{ab}$:

$$y\sqrt{\frac{a}{a+b}} + x\sqrt{\frac{b}{a+b}} = \sqrt{ab}$$

Setzen wir die Coordinaten abwechselnd = null, so erhalten wir als Abschnitte auf den Achsen

$$y = \sqrt{b(a+b)}, \quad x = \sqrt{a(a+b)}$$

Die Winkeltangente ist:

$$-\sqrt{\frac{b}{a}} = -\sqrt{\sqrt{\frac{Sy_1^2}{Sx_1^2}}} = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}} \quad \text{w. z. b. war.}$$

Daraus folgt der Satz: Jede Ellipse hat eine Tangente, deren Länge im Quadranten gleich der Summe der Halbachsen ist. Dieselbe wird durch den Berührungspunkt in die Halbachsen zerlegt.

§ 5.

Wir fanden bei dieser Gelegenheit

$$m = \sqrt{b(a+b)} \quad \text{und} \quad n = \sqrt{a(a+b)}$$

mithin

$$m^2 : n^2 = b : a$$

d. h. die Quadrate der Katheten verhalten sich, wie die Achsen der betr. Ellipse oder die Abschnitte der Tangente.

Nun ist aber leicht zu zeigen, dass dasselbe Verhältniss besteht zwischen den Katheten und den Abschnitten der Hypotenuse, in welche dieselbe durch eine Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels zerlegt wird.

q sei senkrecht auf S; dann ist

$$m : n = q : d, \quad q^2 = c \,.\, d, \quad m^2 : n^2 = q^2 : d^2$$

also

$$\underline{m^2 : n^2} = c \,.\, d : d^2 = \underline{c : d}$$

Da oben war

$$m^2 : n^2 = b : a. \quad \text{also} \quad b : a = c : d \quad \text{so ist}$$

$$\underbrace{a + b}_{S^2} : a = \underbrace{c + d}_{S} : d, \quad S : a = S : d \quad \text{oder}$$

$$\underline{a = d} \quad \text{folglich auch} \quad \underline{b = c}$$

Hieraus folgt nun, dass die Senkrechte vom Scheitel die Hypotenuse in dieselben Abschnitte a und b zerlegt, wie der Berührungspunkt der Tangente an die Begrenzungscurve, nur in umgekehrter Folge. Dies gibt ein Mittel an die Hand, bei jeder Lage von S den zugehörigen Punkt der Begrenzungscurve auf ihr zu finden, indem man den durch die Senkrechte vom Scheitel entstandenen oberen Abschnitt am unteren Ende abträgt. Der neue Endpunkt ist der gesuchte Punkt der Begrenzungscurve.

Die Tangente an die Begrenzungscurve und an die zugehörige Ellipse hat noch 2 bemerkenswerte Eigenschaften, die allem Anscheine nach bisher unbekannt sind:

1) Von allen möglichen Tangenten an die Ellipse ist diese, welche gleich der Achsensumme S ist, die kürzeste zwischen den Schnittpunkten mit den Achsen.

2) Von allen durch einen bestimmten Punkt 0 gelegten Hypotenusen ist diejenige die kürzeste, welche der Lage des Punktes als Begrenzungscurvenpunkt mit der Hypotenuse als Tangente entspricht.

Beweis ad I.

Wir leiten zuerst aus der Gleichung der Ellipsentangente die

allgemeine Form des Ausdrucks für die Länge zwischen den Achsen ab, indem wir x und y abwechselnd 0 setzen.

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2, \quad y = \frac{b^2}{y_1}, \quad x = \frac{a^2}{x_1}$$

$$\text{Tangentenlänge} = \sqrt{\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4}{y_1^3}}$$

Eliminiren wir y_1 durch den aus der Ellipsengleichung gewonnenen Ausdruck

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) \quad \text{so kommt:}$$

$$\text{Länge } L = \sqrt{\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4 \cdot a^2}{b^2 (a^2 - x_1^2)}} = a \sqrt{\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{a^2 - x_1^2}}$$

Dies muss also ein Minimum sein und der sich ergebende Wert muss x_1 als eine Function von a und b enthalten, die dem oben für den Fall der Begrenzungscurve abgeleiteten Werte gleich ist. Factor a kann als constant weggelassen werden, da er auf die Verschiedenheit der beiden Seiten ohne Einfluss ist. Ebenso kann, da $a^2 - x_1^2$ immer positiv bleibt und der Radicand desgleichen, das Wurzelzeichen fortbleiben. Dann variiren wir x_1^2 als $x_1^2 \pm z$. Es entsteht

$$\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{a^2 - x_1^2} < \frac{a^2}{x_1^2 \pm z} + \frac{b^2}{a^2 - x_1^2 \mp z}$$

schaffe die Nenner fort:

$$a^2 (a^2 - x_1^2)(x_1^2 \pm z)(a^2 - x_1^2 \mp z) + b^2 x_1^2 (x_1^2 \pm z)(a^2 - x_1^2 \mp z) <$$
$$a^2 x_1^2 (a^2 - x_1^2)(a^2 - x_1^2 \mp z) + b^2 x_1^2 (a^2 - x_1^2)(x_1^2 \pm z)$$

es bleibt:

$$\pm a^2 z (a^2 - x_1^2)^2 < \pm b^2 x_1^4 z$$

dividire durch z und setze es dann $= 0$

$$a^2 (a^2 - x_1^2)^2 = (b^2 x_1^4), \quad a(a^2 - x_1^2) = b x_1^2, \quad a^3 = x_1^2 (a \pm b)$$

$$x_1 = a \sqrt{\frac{a}{a \pm b}} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Der Fall $a \sqrt{\frac{a}{a - b}}$ ist unmöglich, weil dann entweder $b > a$

und der Wert imaginär oder $a > b$ und dann $x_1 > a$ wäre, was in der Ellipse nicht vorkommen kann.

Beweis ad II.

Hierfür suchen wir den allgemeinen Ausdruck für alle durch $x_1 y_4$ möglichen Hypotenusen und dann davon das Maximum. Es ist:

$$H^2 = m^2 + n^2$$

ferner

$$y_1 : m = n - x_1 : n$$

also

$$m = \frac{y_1 n}{n - x_1}$$

demnach

$$H^2 = \frac{y_1^2 n^2}{(n - x_1)^2} + n^2 = \text{Minimum}$$

Variire n als $n \pm z$, so muss sein:

$$\frac{y_1^2 (n^2 \pm 2zn)}{(n - x_1 \pm s)^3} + 2zn > \frac{y_1^2 n^2}{(n - x_1)^2}$$

$$y_1^2 (u^2 \pm 2zn)(n - x_1)^2 \pm 2zn(n - x_1)^4 > y_1^2 n^3 (n - x_1 \pm z)^2$$

$$n^2 \pm 2zn y_1^2 (n - x_4)^2 \pm 2zn(n - x_1)^4 > y_1^2 \pm 2z(n - x_1) n^2 y_1^2$$

dividire durch $2zn(n - x_1)$

$$\pm y_1^2 (n - x_1) \pm (n - x_1/^3 > \pm n y_1^2$$

oder da $z = 0$ und die Ungleichheit wegfällt:

$$-x_1 y_1^2 + (n - x_1)^3 = (n - x_1)^3 = x_1 y_1^2 \quad \underline{n - x_1 = \sqrt{x_1 y_1^2}}$$

Nun ergibt sich aus Fig. 4.:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y_1}{n - x_1}$$

(für alle möglichen H) demnach für das kürzeste H

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y_1}{\sqrt{x_1 y_1^2}} = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}$$

welches wir oben als Tangente des Winkels einer Tangente an die gefundene Begrenzungscurve ermittelt hatten. Folglich ist eine solche die kürzeste Hypotenuse durch ihren Berührungspunkt. Dass diese Eigenschaft für die Praxis häufig von Bedeutung sein kann, ist ohne Weiteres einleuchtend.

§ 6.

Wenn wir in der Begrenzungscurve $x = y$ setzen, so erhalten wir

$$2\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \qquad x = \frac{S}{2\sqrt{2}}$$

Da der betr. Punkt auf einer Linie liegen muss, die unter 5° gegen die Achsen geneigt vom Anfangspunkt ausgeht, so ist der Abstand vom Anfangspunkt

$$x = \sqrt{2} = \frac{S}{2}$$

Und da die Gleichung eine sog. symmetrische ist, d. h. x und y treten in genau derselben Function auf, so muss auch die Curve eine solche sein, die durch die benannte 45° Linie in 2 symmetrische Hälften geteilt wird. Jeder Punkt hat daher auf der andern Seite dieser Symmetrie-Achse einen ihm homogenen Punkt, mit denselben, nur vertauschten Coordinaten. Die Curve lässt sich auch auf die Symmetrie-Achse beziehen und lautet dann die Gleichung:

$$\sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{2\,S^2}$$

Aus beiden Gleichungsformen geht hervor, dass die Vorzeichen von x und y ganz ohne Einfluss sind (ist eine Coordinate positiv, die andre negativ, so verwandelt sich nur $x+y$ in $x-y$ und umgekehrt.) Mithin geht die Curve durch alle 4 Quadranten.

Die Gleichung der Normale ist:

$$y - y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y}}\,(x - x_1)$$

Setzen wir $y = 0$, so ist

$$-y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y_1}}\,(x - x_1), \quad -\frac{y_1\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}} = x - x_1, \quad x = x_1 - \frac{y_1\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

also

$$\text{Subnormale} = \frac{y_1\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

$$\text{Subtangente} = n - x_1 = \sqrt{x_1 y_1^2}$$

demnach

$$Sn : Stg = \sqrt{\frac{y_1^4}{x_1}} : \sqrt{x_1 y_1^2} = \sqrt{y_4^2} : \sqrt{x_1^2} = b : a$$

Der Radiusvector (Rv) ist $= \sqrt{x^2 + y^2}$. Drücken wir x und y durch a und b aus, so ist

$$Rv^2 = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} = \frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 + b^2 - ab$$

Ist $x = y$, so ist $a = b$, die Ellipse ein Kreis, dessen Radius $= S/2$. Dass dies der kürzeste Rv ist, kann man leicht zeigen, indem man

$$a = \frac{S}{2} \pm z \quad \text{und} \quad b = \frac{S}{2} \mp 2$$

setzt. Dann ist

$$Rv^2 = \frac{S^2}{4} \pm Sz + z^2 + \frac{S^2}{4} \pm Sz + z^2 - \frac{S^2}{4} + z^2 = \frac{S^2}{4} + 3z^2$$

daher $Rv > S/2$.

Da die Entfernung des Ellipsenbrennpunktes vom Anfangspunkt

$$= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{S^2} \sqrt{\sqrt{r^2} - \sqrt{y^2}}$$

so ist ein Fall möglich, wo e und der Rv gleich sind. Alsdann ist

$$a^2 - b^2 = a^2 + b^2 - ab, \quad 2b^2 = ab, \quad a = 2b = \frac{2S}{3}$$

$$b = \frac{S}{3} \quad \text{nud}$$

$$x = \frac{2S}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = S \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \quad y = T \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{y_1}{x_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^3}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Die Bedeutung dieses Falles wird weiter unten zur Sprache kommen.

Man kann die Begrenzungscurve in der Weise entstanden denken, dass der Mittelpunkt von S mit dem Radius $S/2$ im Anfangspunkt befestigt und darum gedreht wird, während die Endpunkte auf den Achsen vom betr. nach dem Anfangspunkte gleiten. Bestreut man nun die Fläche während S noch an einer Achse anliegt, mit einem

feinen Pulver oder Sande, so schiebt S auf seinem Wege diesen genau so weit zurück, dass die Contur des Sandes in der Begrenzscurve liegen bleibt. In der Praxis beschreibt z. B. der eine Arm des Watt'schen Parallelogramms einen Teil dieser Curve.

§ 7.

Wir fanden in § 5., dass auch die Senkrechte vom Anfangspunkt auf die Hypotenuse S diese in 2 Abschnitte a und b, die Achsen der Ellipse mit dem entsprechenden Berührungspunkt, zerlegt Zu sehr interessanten Beziehungen gelangt man nun, wenn man alle diese Treffpunkte von S in seinen verschiedenen Lagen mit den bezl. Senkrechten zu einer continuirlichen Curve verbindet und deren Gleichung aufsucht. Da das Stück b am oberen Ende gleich demselben unterhalb des Berührungspunktes, so ist

$$n - x_1 = X \quad \text{und} \quad m - y_1 = Y$$

Mithin sind die Coordinaten des neuen Punktes

$$x = \sqrt[3]{S^2 x_1} - x_1 = \sqrt[3]{x_1}\,(\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x_1^2}) = \sqrt[3]{x_1 y_1^2}$$

$$y = \sqrt[3]{S^2 y_1} - y_1 = \sqrt[3]{y_1}\,(\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{y_1^2}) = \sqrt[3]{x_1^2 y_1}$$

Daraus ergibt sich sofort

$$x \cdot y = \sqrt[3]{x_1^3 \cdot y_1^3} = x_1 y_1$$

das Rechteck aus den Coordinaten des Punktes der neuen Curve ist also gleich dem Rechteck aus den Coordinaten des Berührungspunktes der Begrenzungscurve auf derselben Hypotenuse S. Ferner ergeben obige Werte:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \sqrt[3]{x_1^2 y_1^4} \\ y^2 &= \sqrt[3]{x_1^4 y_1^3} \end{aligned}\right\} x^2 + y^2 = \sqrt[3]{x_1^2 y_1^2}\,(\sqrt[3]{y_1^2} + \sqrt[3]{x_1^2}$$

letztere Klammer ist $= \sqrt[3]{S^2}$

$$x_1 y_1 = x y \quad \text{also}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt[3]{S^2 x^2 y^2} \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt[3]{Sxy}$$

Gleichung der gesuchten Curve. Mit Worten: Der Kubus aus dem Radiusvector ist gleich dem Parallelepiped aus der Linie S mit den Coordinaten des betr. Punktes.

Die hier gefundene Curve, welche ich nach ihrer charakteristischen Form einfach Blattcurve (eigentlich ist sie eine Schleife) nennen will, ist an sich keine neue. Wol aber scheint ihre Bedeutung. Ursprung, Zusammenhang mit Ellipse und Begrenzungscurve, sowie ihre näheren Eigenschaften anher unbekannt zu sein. Man findet sie bereits angeführt in anderer Form in Lübsen's Lehrbuch der analytischen Geometrie (S. 138) der sie seinerseits einem Werke von Cramer entlehnt hat, der sie wiederum aus Guido Grandi (Florenz 1728) übernommen. Wie lange ist demnach die Curve schon bekannt, ohne dass man ihren Zusammenhang mit der Ellipse kannte! Denn wäre das der Fall, so fände sich in genanntem Buche doch wenigstens eine Andeutung davon. Allein schon die Art, wie die Blattcurve bei Lübsen mit Hülfe ihrer Polargleichung discontinuirlich construirt wird, — die in gar keinem Zusammenhang mit obiger Herleitung steht — beweist klar, dass er von der eigentlichen Bedeutung der Curve keine Ahnung hatte. Ich fand die Curve auf dem bezeichneten Wege, ehe ich Lübsen's Buch in die Hände bekam, der sie übrigens blos verwertet, um zu zeigen, welchen Nutzen oft die Verwandlung einer Coordinatengleichung in eine Polargleichung für die geometrisch-anschaulische Construction einer Curve haben könne. Bei ihm erfährt man daher über die weiteren Eigenschaften der Curve nichts. Offenbar ist doch meine discontinuirliche Construction durch Senkrechte vom Scheitel auf die Hypotenusen S viel einfacher, als die seinige mittelst des Sinus des doppelten Winkels.

§ 8.

Um Irrtümer zu vermeiden, sollen von jetzt ab die Coordinaten der Blattcurve immer mit x, y, diejenigen der Begrenzungscurve mit xy bezeichnet werden. Aus der Figur, wie aus obigen Werten ergibt sich:

$$x^2_1 = \sqrt{x^2 y^4} = y\sqrt{x^2 y} = y_1 \cdot y$$

$$y_1^2 = \sqrt{x^4 y^2} = x\sqrt{x^2 y} = x_1 \cdot x$$

Demnach ist die Abscisse die mittlere Proportionale zwischen ihrer Ordinate und der Ordinate des zugehörigen Punktes der Begrenzungscurve. Für die Ordinate gilt das Entsprechende. Ferner gelten noch folgende Beziehungen:

$$m = y + y, \quad n = x + x, \quad x : x = b : x = y : y$$

Aus der Gleichung der Begrenzungscurve folgt

$$(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3 = S^2 = x^2 + y^2 + 3\sqrt[3]{x^2y^2}\,(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})$$

also

$$Rv^2 = 3\sqrt[3]{S^2x^2y^2}\,. \quad Da\; xy = xy \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{S^2x^2y^2} = x^2 + y^2$$

und letzteres das Quadrat des Radiusvectors der Blattcurve (der mit Rvb bezeichnet sei), so haben wir zwischen den Radiusvectoren 2er zusammengehöriger Punkte beider Curven die Beziehung:

$$Rv^2 = S^4 - 3\,Rvb^2$$

Setzen wir in der Blattcurvengleichung $x = y$, so ist

$$2x^2 = \sqrt[3]{S^2y^4}, \quad 8x^6 = S^2x^4, \quad x = \frac{S}{2\sqrt{2}}$$

und der Abstand des betr. Punktes vom Anfangspunkt ist $= S/2$.

Da dieser Punkt auf der Symmetrie-Achse liegt, so folgt, dass beide Curven diesen Punkt gemein haben, sich darin tangiren, der in diesem Falle allen 4 Linien, nämlich auch dem Kreise mit dem Radius $S/2$ und der Hypotenuse S angehört.

Es ist natürlich leicht, zu einem gegebenen Punkt der Blattcurve den entsprechenden der Begrenzungscurve zu finden bzhw. zu construiren. Ebenso haben wir gesehen, dass bei gegebenem m und n oder gegebener Ellipse aus a und b sogleich der zugehörige Punkt der Begrenzungscurve gefunden werden kann. Anders aber steht es mit der Aufgabe, aus den gegebenen Coordinaten eines Punktes der Begrenzungscurve den entsprechenden der Blattcurve und das zugehörige S zu ermitteln. Denn alle hier in Betracht kommenden Grössen sind dritte Wurzeln einer Function von x und y bzhw. S, die sich mit den bisherigen Mitteln der Planimetrie nicht construiren lassen. Weder m noch n, noch die Subnormale, noch auch a oder b oder die Senkrechte vom Scheitel auf S kann ich aus ihren gefundenen Formeln geometrisch darstellen. Der Weg zur Lösung liegt in der Weiterverfolgung des Umstandes, dass die Radiivectoren an zusammengehörige Punkte beider Curven auf S gleiche Abschnitte fi und ow erzeugen. In Folge dessen sind die Dreiecke fri und ovw congruent und $fr = ov$. Verbinde ich den gegebenen Punkt mit dem Anfangspunkt, so zeigt die Figur, dass der gesuchte Punkt der Blattcurve auf der Peripherie eines über qo errichteten Halbkreises liegen muss. Des Weiteren wird dessen Lage dadurch bestimmt,

dass die Senkrechte von diesem Punkte auf die y-Achse und die Verbindungslinie desselben mit o, verlängert, auf der y-Achse ein Stück $-y_1$ abschneiden müssen. Hierauf gründet sich die geometrisch-constructive Auffindung des zu o gehörenden Blattcurvenpunktes. Man schlägt über qo einen Halbkreis. nimmt dann y_1 auf die Ordinaten-Achse und errichtet im unteren Endpunkte von y_1 eine Senkrechte parallel zur X-Achse. Mittelst Anlegen eines gewöhnl. hölzernen Winkels an die X-Achse, auf dessen verticalen Schenkel man y_1 abträgt, und dessen horizontaler Schenkel genügende Länge über o hinaus hat, lässt sich dies leicht ausführen. Man befestigt ferner in o ein um diesen Punkt drehbares Lineal, dessen nach unten gerichtete Kante durch o läuft und am oberen Endpunkt von y_1 auf der Y-Achse anliegt Verschiebt man nun das hölzerne Dreieck der Y-Achse entlang aufwärts, so wird der horizontale Schenkel parallel zur X-Achse sich bewegen, und gleichzeitig wird das Lineal um o drehend, eine ständige geradlinige Verbindung zwischen o und dem oberen Endpunkte von y_1 bilden. Bald kommt dann der Moment, wo der horizontale Schenkel des Dreiecks und die um o drehende Gerade einen Schnittpunkt mit einander bilden, dieser rückt bei weiterer Fortbewegung des Winkels in einer sogleich zu bestimmenden Curve weiter fort, passirt o selbst und trifft endlich mit der Peripherie des Halbkreises zusammen, wo dann der gesuchte Punkt gefunden ist. Denn bei jeder Lage dieses Schnittpunktes muss das an der Y-Achse entstehende Dreieck die Vertical-Kathete y_1 haben und dem an der X-Achse anliegenden Dreieck congruent sein.

So zeigt die Figur einen solchen Zwischenpunkt p; offenbar ist $\Delta usp \cong \Delta ovh$. Der Unterschied zwischen p und dem gesuchten Punkte besteht nur darin, dass in i die Verbindungslinie mit q auf der Hypotenuse senkrecht steht, (weil i auf dem Halbkreise liegt) bei allen anderen Schnittpunkten, wie p, jedoch nicht. Es ist nun zunächst von Interesse, die Natur der hier von den erwähnten Schnittpunkten gebildeten Curve *dopi* kennen zu lernen. Nehmen wir also p als beliebigen Punkt derselben an.

Es ist

$$sp = vh = x$$

ferner

$$vh : y_1 = vh + x_1 : y_1 + y \quad \text{oder} \quad x : x + x_1 = y_1 : y_1 + y$$

$$x + x_1 : x = y + y_1 : y_1$$

ergibt

$$x_1 : x = y : y_1$$

und somit

$$\underline{x \cdot y = x_1 \cdot y_1}$$

mit Worten: „Das Product aus den Coordinaten jedes Punktes dieser „Curve ist constant $= x_1 y_1$." Demnach ist die Curve eine Hyperbel und die Achsen sind deren rechtwinklige Asymtoten. Mithin haben wir durch obiges Verfahren gefunden:

1) Eine continuirliche Construction einer Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten.

2) Eine Methode, die kürzeste Linie zwischen den Achsen durch einen Punkt $x_1 y_1$ zu legen.

3) Den Lehrsatz, dass in einer Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten jede durch dieselbe gehende beliebige Linie von der Hyperbel so geschnitten wird, dass die ausserhalb derselben fallenden Stücke gleich sind.

4) Eine Methode, auf constructivem Wege jedes Prisma in einen Kubus gleichen Inhalts zu verwandeln, bzhw. dessen Seite zu erhalten.

Das letztere Resultat ist offenbar das Wichtigste, bedarf aber noch einer Erläuterung. Da man jedes Rechteck in ein Quadrat verwandeln kann, und sonach auch für jedes Prisma eines mit gleichem Inhalt und quadratischer Grundfläche sich herstellen lässt, so handelt es sich zuletzt um die Möglichkeit, eine Linie zu finden, die der Formel genügt:

$$x^3 = a^2 b$$

Da wir nun für die Coordinaten der Blattcurve haben:

$$x = \sqrt[3]{xy^2} \quad \text{und} \quad y = \sqrt[3]{x^2 y}$$

so braucht man die beiden Seiten des quadratischen Prisma's nur als Coordinaten eines Punktes der Begrenzungscurve aufzutragen und erhält dann nach dem obigen Verfahren sogleich das gesuchte x als Abscisse oder Ordinate des gefundenen Blattcurvenpunktes, jenachdem man die Seite des Quadrats als Ordinate oder Abscisse aufgetragen hat.

Wir werden später sehen, dass die Gleichung der Blattcurve in verschiedenen Fällen treffliche Dienste leistet; ebenso aber auch das zuletzt demonstrirte Verfahren.

§ 9.

Interessant ist es, bei dieser Gelegenheit den **Inhalt** des Dreiecks zu untersuchen, welches von den Radienvectoren zweier zusam-

mengehöriger Punkte beider Curven eingeschlossen wird. Man sieht sogleich, dass dieser Inhalt mit null anhebt, wenn S auf der Achse liegt, allmählich grösser, dann wieder kleiner und bei der Symmetrie-Lage von S, wo beide Radiivectoren wieder zusammenfallen, abermals null wird. Es muss also ein Maximum dieses Inhalts geben. Die auf der Hypotenuse S liegende Kathete des Dreiecks ist

$$= a - b = \sqrt{Sx^2} - \sqrt{Sy^2} = \sqrt{S}\,(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})$$

die andre ist $= \sqrt{Sxy}$, somit Inhalt

$$= \frac{\sqrt{S^2xy}\,(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})}{2}.$$

Da hier $\frac{\sqrt{S^2}}{2}$ constant ist, so bleibt dieser Factor auf das Resultat der Proportion ohne Einfluss und kann deshalb wegfallen Es muss demnach von $\sqrt{xy}\,(\sqrt{a^2} - \sqrt{y^2})$ das Maximum gesucht werden. Variiren wir $\sqrt{x}$ als $\sqrt{x} \pm z$, so haben wir:

$$\sqrt{x^1} \pm 2z\sqrt{a} + \sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x} = \sqrt{S^2}$$

und somit tritt für $\sqrt{y^2}$ ein: $\sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x}$. Dann lautet die Proportion:

$$\sqrt{xy}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}) > (\sqrt{x} \pm z)\sqrt{\sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x}}\,(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} \pm 4z\sqrt{x})$$

quadrire jetzt

$$\sqrt{x^2y^2}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 > (\sqrt{x^2} \pm 2z\sqrt{x})(\sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x})$$
$$.\,[(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 \pm 8z\sqrt{x}\,(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})]$$
$$\pm 2z\sqrt{xy^2}\,(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 \mp 2zx(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^3$$
$$\mp 8zx\sqrt{y^2}\,(\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2})$$

dividire durch $2z\,(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})\sqrt{x}$

und erhalte

$$0 > \pm \sqrt{y^2}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}) \mp \sqrt{x^2}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} \pm 4\sqrt{y^2x^2}$$

setze $z = 0$, dann ist:

$$(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 = 4\sqrt{x^2y^2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = 2\sqrt{xy}$$

nach dem unteren Resultate $= \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{x^4} - 4\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^4} = 4\sqrt{x^2y^2}$$

$$\sqrt{x^4} + 2\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^4} = 8\sqrt{x^2y^2}$$

$$(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})^2 = 8\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{S^4}$$

somit

$$8\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{S^4}, \quad \sqrt{xy} = \frac{\sqrt{S^2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= \sqrt{S^2} \\ 2\sqrt{xy} &= \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \sqrt{S^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{S^2}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{S}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}$$

da

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{2}}$$

so ist

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{2}\sqrt{S}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+5)}}$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{S}}{2}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} + \frac{2}{\sqrt{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\sqrt{2}}}\left(\frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt[4]{2}}\,\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{S}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{S}}{2}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}\right] = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt[4]{2}}\left[\frac{\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2^3}\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

Der Ro an den zugehörigen Punkt der Blattcurve ist unschwer festzustellen

$$\sqrt{xy} \text{ war } = \frac{\sqrt{S^2}}{2\sqrt{2}}$$

da

$$xy = x_1\, y_1 \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Sxy}$$

so ist

$$Ro = \frac{S}{2\sqrt{2}}$$

Das Mittelstück auf der Hypotenuse ist

$$= a - b = \sqrt{S}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$$

nach Obigem

$$= \sqrt{S^3}\left(\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Daraus folgt:

Das Maximum für den Inhalt des Dreiecks zwischen zwei zusammengehörigen Radiivectoren beider Curven ist $= \frac{S^2}{8}$ also = dem Quadrat der Blattcurve Ra. Der Rv der Begrenzungscurve ist in diesem Falle $= S\sqrt{\frac{5}{8}}$.

Da die eine Kathete doppelt so gross wie die andere, so hat der anliegende Winkel an der Hypotenuse die $\text{tg} = \frac{1}{2}$ Die Neigung der Hypotenuse S gegen die X-Achse ist

$$= \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2}-1$$

Nimmt man diesen Winkel doppelt, so ist

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}-2}{1-2+2\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2} = 1$$

d. h. also $2\alpha = 45^0$ und die Neigung von S beträgt $\frac{1}{4}$ von einem Rechten.

Die Construction des Falles ist hiernach äusserst leicht.

Die Gleichung der Blattcurve gibt, nach der Cardani'schen Formel aufgelöst für $\sqrt{x^2}$ den Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{y}{2}}\left[\sqrt{\sqrt{y^2 - \frac{4S^2}{27}} - y_1} - \sqrt{\sqrt{y^2_1 - \frac{1S^2}{27}} + y}\right]$$

Nun werden wir aber sogleich zeigen, dass y^2 höchstens $=$, niemals aber grösser als $\frac{1S^2}{27}$ sein kann, mithin ergäbe die Formel nur für diesen Fall einen obendrein noch negativen reellen Wert, in allen übrigen einen imaginären. Selbst für ersteren Fall wird der Wert für x imaginär, weil dann $\sqrt{x^2}$ negativ sein müsste, also

$$\sqrt{x} = i$$

Es würde uns sonach schwer werden, ohne Zuhülfenahme der höheren Mathematik über die weiteren Eigenschaften der Curve es zu ermitteln, wenn nicht ihre Beziehung zu den Coordinaten der Begrenzungscurve hierzu ein Mittel an die Hand gäbe. Dadurch aber sind wir in der Lage, „die Coordinaten der Ersteren durch die der Letzteren zu ersetzen", damit zu operiren und nach erlangtem Resultat wieder in jene überzuführen.

§ 10.

Ein Versuch lehrt sogleich, dass keine Möglichkeit besteht, die Gleichung der Tangente an die Blattcurve auf dem gewöhnlichen Wege der Secantengleichung zu finden, daher wir hier in erster Linie das oben erwähnte Verfahren anwenden müssen. Hierbei fällt sofort Eins auf. Bei der Form der Blattcurve beginnen nämlich die Tangenten, wenn man sie successiv um die Curve herumführt, im Anfangspunkt und auf der Y-Achse, vollführen eine Wendung von $^3/_4$ Kreis und endigen wieder im Anfangspunkt jedoch auf der X-Achse. Dabei passiren sie 2 Lagen, wo die Tangente einmal mit der X-, einmal mit der Y-Achse parallel läuft und die hierzu gehörigen Punkte nenne ich Cultimationspunkte der Curve, deren Einer im Maximum für y, der andere für x repräsentirt. Diese müssen für die Tangenten-Gleichung von Bedeutung sein, weil offenbar vom Anfangs- bis zum Y-Cultimationspunkte der Winkel, welchen die Tangente mit der X-Achse bildet, eine positive Tangenten-Function hat, diese im Y-Culminationspunkte null wird, dann in eine negative übergeht und im X-Culminationspunkt $\mp \infty$ wird; sie schlägt darauf wieder in positiv um und endigt im Anfangspunkt mit O. Dies wird die Tangenten-Gleichung ausweisen müssen und es könnte daher überflüssig scheinen, die Culminationspunkte vorher aufzusuchen. Demnach wollen wir, da die Operation sehr einfach

ist, dies vorher tun, weil wir dann bei Auftreten des betr. Ausdrucks in der Tangenten-Gleichung dessen Bedeutung sofort erkennen.

Es war

$$y_1 = \sqrt{x^2 y}$$

und da

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{S^2} - \sqrt{y^2}$$

so ist

$$y_1 = \sqrt{S^2 y} - y$$

Hiervon ist aber das Maximum zu suchen

$$\sqrt{S^2 y} - y > \sqrt{S^2}(\sqrt{y} \pm z) - y \mp 3z\sqrt{y^2}$$

$$3z\sqrt{y^2} > z\sqrt{S^2} \qquad 3\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{x^2} = 2\sqrt{y^2}$$

multiplicirt mit

$$\sqrt{x^4 y^2} = 2\sqrt{x^2 y^4} \quad \text{oder} \quad y^2 = 2x^2$$

Für den Y-Culminationspunkt ist also y die mittlere Proportionale zwischen x und $2x$. Da wir aber auch in § 8. gefunden hatten

$$y_1^2 = x_1 \cdot x$$

so ist offenbar

$$x_1 = 2x$$

und weil

$$n = x_1 + x$$

so ist

$$n = 3x$$

und es ergibt sich

$$x = \frac{n}{3}$$

Ist aber die Kathete durch die Ordinate in $^1/_3$ geteilt, so muss es auch die Hypotenuse durch den Combiantionspunkt sein; m. r. W.: „der Culminationspunkt gehört zu einem Punkte der Begrenzungscurve, dessen zugehörige Ellipse die Achsen hat $\frac{2S}{3}$ und $\frac{S}{3}$“. Da beide Punkte symmetrisch zur 45° Linie liegen müssen, so liegt für den K-Culmiationspunkt das Verhältniss umgekehrt:

$$2y^2 = x^2.$$

Bestimmen wir die Coordinaten genauer. Es war für Y-Maximum

$$3x_1^2 = \sqrt{S^2 \cdot 2x^4}, \quad 27x^6 = S^2 \cdot 2x^4, \quad x^2 = \frac{S^2 \cdot 2}{27}, \quad x = S\sqrt{\frac{2}{27}}$$

$$y^2_1 = 2x_1^2 = \frac{S^2 . 4}{27}, \quad y = \frac{S . 2}{\sqrt{27}}$$

$$\text{Radiusvector} = \sqrt{3x^2} = \frac{S}{3}\sqrt{2}$$

Da nun der betr. Punkt der Begrenzungscurve ebenfalls im Abstande $S/3$ vom Endpunkte der Hypotenuse liegt, so muss das Stück zwischen beiden Punkten wiederum $S/3$ sein und verhält sich mithin zum Ro der Blattcurve wie $1 : \sqrt{2}$ oder wie die Seite eines Quadrats zur Diagonale.

Der Ro der Begrenzungscurve ist hiernach

$$= \sqrt{\frac{S^2}{9} + \frac{S^2 . 2}{9}} = \frac{S}{3}\sqrt{3} = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

Es war für diesen Fall

$$\sqrt{x^2} = 2\sqrt{y^2}$$

also auch

$$3\sqrt{y^2} = \sqrt{S^2}, \quad 27y^3 = S^2$$

$$y = \frac{S}{\sqrt{27}} \quad \sqrt{x^2} = \frac{2\sqrt{S^2}}{3} \quad x^2 = \frac{8S^2}{27} \quad x = S\sqrt{\frac{8}{27}}$$

$$m = \sqrt{S^2 k} = \sqrt{\frac{S^3}{\sqrt{27}}} = \frac{S}{\sqrt{3}} = Ro \quad n = \sqrt{S^2 x}$$

$$= \sqrt{S^3}\sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Also $m : n = 1 : \sqrt{2}$ und Inhalt des Dreiecks

$$= \frac{S^2\sqrt{2}}{3 . 2} = \frac{S^2}{3\sqrt{2}}$$

Hier ist auch derselbe Fall, wo die Entfernung des Ellipsenbrennpunktes vom Anfangspunkt gleich ist dem Rv an den Berührungspunkt der Begrenzungscurve. Denn

$$a = 2b, \quad \text{also} \quad e^2 = a^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 = \frac{3S^2}{9} = \frac{S^2}{3} \quad \text{und}$$

$$e = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

In diesem Falle bilden beide Radiivectoren von den Brennpunkten an

den Berührungspunkt O einen rechten Winkel miteinander. Die unter 45° gegen beide Achsen laufende Verbindungslinie der Culminationspunkte ist

$$(y_1 - x_1)\sqrt{2} = \frac{S}{\sqrt{27}}(2 - \sqrt{2})\sqrt{2} - (\frac{2S\sqrt{2} - 1}{\sqrt{27}} = D$$

§ 11.

Gehen wir nun an die Aufsuchung der Tangentengleichung. Der Weg hierzu ist folgender: Man zieht einen Radiusvector und stellt dessen Gleichung auf. Dann stellt man die Gleichung einer zum Ro parallelen Secante auf, dass dann eine zu beiden senkrechte Linie und ermittelt dadurch den allgemeinen Ausdruck für den Abstand zwischen Ro und Secante. Dieser Abstand wird ein Maximum, wenn die Secante zur Tangente wird. Bei Aufsuchung dieses Maximi zeigt es sich, dass es damit gleichbedeutend ist, wenn man für den Abschnitt p, welchen die Secante auf der X-Achse rechts vom Anfangspunkte erzeugt, das Maximum aufsucht, weil zwischen A und p ein festes Verhältniss besteht, denn A ist $= p \cdot \cos\alpha$. In der Figur ist

$$\sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2)} : y_1 = p : A$$

ferner

$$x_1 - p : y_1 = x : y$$

Mithin ist die Ermittlung von A erst durch p möglich und es ist daher nur von diesem das Maximum aufzusuchen. Es ist

$$p = \frac{x_1 y - y_1 x}{y} = \text{Maximum.}$$

Der Nenner y kann, da der Ro gegebene constante Coordinaten hat, für die Ermittelung wegfallen, und wir verwandeln nunmehr die Blattcurvencoordinaten in solche der Begrenzungscure, da sonst nicht y in x übergeführt werden kann. Es ist

$$x_1 y - x y_1 = \sqrt{x_1 y_1^2 \cdot x^2 y} - \sqrt{x y^2 \cdot x_1^2 y_1}!$$

Hier kann Factor $\sqrt{xy}$ als constante Grösse wiederum herausgezogen werden. Es bleibt:

$$\sqrt{x \cdot x_1 y_1^2} - \sqrt{y \cdot x_1^2 y_1} = \text{Maximum.}$$

Variiren wir jetzt $\sqrt{x_1}$ als $\sqrt{x_1} \pm z$, dann ist

$$\sqrt{x_1{}^2}\ \sqrt{\ 2z\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1{}^2}} = \sqrt{S^2}$$
$$\mp 2z\sqrt{x_1}$$

Wir haben also:

$$\sqrt{xx_1 y_1{}^2} - \sqrt{yx_1\ y_1} \text{ oder } \sqrt{x_1 y_1{}^2} - \sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{x_1{}^2 y_1} >$$

$$(\sqrt{x_1 xz}))(\sqrt{y_1{}^2 \mp 2z\sqrt{x_1}}) - \sqrt{\frac{y}{x}}(\sqrt{x_1{}^2} \mp 2z)\sqrt{y_1{}^2} \mp 2z\sqrt{x_1}$$

$$\sqrt{x_1 y_1{}^2} - \sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{x_1{}^2 y_1} > \sqrt{x_1 y_1{}^2} \pm z\sqrt{y_1{}^2} \mp 2z\sqrt{x_1{}^2}$$

$$-\sqrt{\frac{y}{x}}(\sqrt{x_1{}^2} \pm 2z\sqrt{x_1})\sqrt{\sqrt{k^{13}} \mp 2z\sqrt{x_1}}$$

bringe die negativen Glieder auf die andere Seite:

$$\sqrt{\frac{y}{x}}(\sqrt{x_1{}^2} \pm 2)\sqrt{x_1})\sqrt{\sqrt{y_1{}^2} \mp 2z\sqrt{x_1}} > \sqrt{\frac{y}{x^2}}\sqrt{x_1{}^2 y_4}$$
$$\pm z(\sqrt{y_1{}^2} - 2\sqrt{x^2})$$

quadrire jetzt

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}(\sqrt{x_1{}^4 \pm 4zx_1})\ )\sqrt{y_1{}^2 \mp 2z\sqrt{x_1}})$$

$$> \sqrt{\frac{y^3}{y^2}}\sqrt{x_1{}^4 y_1{}^2} \pm 2z\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{x_1{}^2 y_1}(\sqrt{y_1{}^2} - 2\sqrt{x_1{}^5})$$

aufgelölst

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}\sqrt{x_1{}^4 y_1{}^2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2}}\,4zx_1\sqrt{y_{12}} \mp \sqrt{\frac{y^2}{x^2}}\,2zx_1\sqrt{x_1{}^2}$$

$$> \sqrt{\frac{y^2}{x^2}}\sqrt{x_1{}^4 y_1{}^2} \pm 2z\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{x_1{}^2 y_1} - 2\sqrt{x_1{}^2})$$

dividire $2z\sqrt{\frac{y}{x}}$, $z = 0$

die beiden Seiten werden gleich

$$\sqrt{\frac{y}{x}}\,y_1(2\sqrt{y_1{}^2} - \sqrt{x_1{}^2}) = \sqrt{x_1{}^2 y_1}(\sqrt{y_1{}^2} - 2\sqrt{x_1{}^2})$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{x_1{}^3}(2\sqrt{y_1{}^2} - \sqrt{x_1{}^2}) = \sqrt{y_1 x^2}\ (\sqrt{y_1{}^2} - 2\sqrt{x_1{}^2})$$

multiplicire mit $\sqrt{x_1 y_1{}^3}$

$$\sqrt{\frac{y}{x}}\,\sqrt{x_1^2 y_1}\,(2\sqrt{x_1^2 y_1^4} - \sqrt{x_1^4 y_1^2}) = \sqrt{y_1^2 x_1}\,(\sqrt{y_1^4 x_1^2} - 2\sqrt{x_1^4 y_1^2})$$

führe jetzt die Coordinaten der Blattcurve wieder ein. Es ist

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y} \cdot y_1 (2x_1^2 - y_1^2) = x_1 (x_1^2 - 2y_7^2)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \frac{(2x_1^2 - y_1^2)}{x_1^2 - 2y_1^2}$$

da nun die Winkeltangente des $Ro = \frac{y}{x}$ und die der Secante, weil sie ihm parallel ist, auch $= \frac{y}{x}$ sein muss, so ist letzterer Ausdruck gleich der Winkeltangente der Tangente im Punkte $x_1 y_1$ und die Tangentengleichung lautet:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1} \frac{2x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 - 2y_1^2} (x - x_1)$$

Wir finden also unsere Erwartung vollkommen bestätigt, dass die charakteristischen Merkmale der Culminationspunkte in der Tangentengleichung wiederkehren. Der Zähler $2x_1^2 - y_1^2$ ist für den y-Culminationspunkt bestimmt, denn setzen wir

$$2x_1^2 = y_1^2$$

(wie in § 10. ermittelt), so wird die Winkeltangente $= 0$, d. h. die Tangente ist der X Achse parallel. Der Nenner hingegen bestimmt den X Culminationspunkt, denn sobald

$$2y_1^2 = x_2^2$$

ist, wird die Winkeltangente $= \infty$, d. h. die Tangente steht auf der X Achse senkrecht.

Setzt man in obigem Ausdruck $x_1 = y_1$, so ist dies offenbar der Fall der Tangente im Symmetriepunkt, und es ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

d. h die Tangente steht unter 45° von links oben nach rechts unten gegen beide Achsen geneigt.

Bemerkenswert ist, dass, obwol die Blattcurve mit den Achsen nur den Anfangspunkt gemein hat, dennoch die Gleichung zwei Werte ergiebt, jenachdem man x_1 oder $y_1 = 0$ setzt. Ist

$$y_1 = 0$$

so hat man Tangente = 0. Ist

$$x_1 = 0$$

so ist die Tangente $= \infty$. Daraus folgt, dass es im Anfangspunkt 2 Tangenten giebt und zwar sind dies die Achsen selbst.

Sowol in der Tangentengleichung der Begrenzungs- wie der Blattcurve kommt der Parameter S nicht mehr vor. Dies beweist, dass alle derartigen Curven untereinander proportional sind und daher keinen Punkt gemein haben können, nur die Blattcurven haben den Anfangspunkt gemein.

Wir sind allerdings bei unserem Aufsuchen der Tangentengleichung von einer rechts vom Ro liegenden Secante ausgegangen. Da aber die resultirende Gleichung dennoch allen Lagen der Tangente Rechnung trägt, so beweist schon dies, dass das Ergebniss dasselbe gewesen wäre, wenn wir die Secante links vom Ro angenommen hätten. Wer es übrigens versucht, wird meine Behauptung bestätigt finden.

§ 12.

Wenn wir auf Grund der gefundenen Resultate nunmehr die Winkel feststellen, welche in zwei zusammengehörigen Punkten der Blatt- und der Begrenzungscurve zwischen den betr. Radiivectoren und den Tangenten an die betr. in diesen Punkten entstehen, so ergiebt sich der auffallende Umstand, dass diese Winkel immer gleich sind. Ermitteln wir zuerst diesen Winkel für die Begrenzungscurve. Es ist

$$\delta = \alpha + \beta$$

also

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{also}$$

$$\delta\delta = \frac{\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}}{1 - \frac{y}{x}\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{y\sqrt{x} + x\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}\,(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})}{\sqrt{x^4} - \sqrt{y^4}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}}$$

Ebenso haben wir bei der Blattcurve

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\beta_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\beta_1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{y}{x}\,\frac{2x^2 - y^2}{x^2 - 2y^2}$$

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{\frac{y}{x} - \frac{2x^2 - y^4}{x^2 - 2y^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{2x^2 - y_9}{x^2 - 2y^2}\right)}$$

$$= \frac{xy(x^2 - 2y^2 - 2x^2 + y^2)}{x^4 - 2x^2y^2 + 2x^2y^2 - y^4} = -\frac{xy(x^2 + y^2)}{x^4 - y^4} = -\frac{xy}{x^2 - y^2}$$

führen wir dies in die Coordinaten der Begrenzungscurve über, so ist

$$\operatorname{tg}\delta_1 = -\frac{xy}{\sqrt{x^2y^4} - \sqrt{x^4y^2}} = -\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2} - \sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}}$$

also $$\delta = \delta_1$$

wonach die Construction einer Tangente an die Blattcurve sehr einfach ist.

Wenn wir nun 2 symmetrisch liegende Radienvectoren annehmen, so lässt sich der zwischen beiden liegende Winkel leicht bestimmen, da das $x =$ dem y des andern Curvenpunktes und umgekehrt Es ist somit

$$\operatorname{tg}E = \frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{1 + \frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

oder, auf den kleineren Winkel bezogen

$$= \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

Dies ist aber der halbe reciproke Wert der Tangente des Winkels zwischen Tangente und *Rv.* Hieraus resultirt erstens der Satz:

D a s   P r o d u c t der Tangenten der Winkel zwischen *Ro* und

Tangente an die Curve und zwischen beiden symmetrischen Radiivectoren ist constant $= \frac{1}{2}$.

Zweitens könnte man auf Grund dieses Umstandes eine Tangente an einen gegebenen Punkt der Blattcurve construiren. Es sei st die Tangente im Punkte i an die Curve (Fig. 10). Dann finden wir mittelst des Zirkels sogleich den zu ri gehörigen $Ro.\ rk$. Nun fällen wir von k eine Senkrechte auf ri, verlängern über l hinaus, bis diese die Tangente schneidet in q.

Dann muss nach Obigem sein

$$\frac{ql}{li} \cdot \frac{lk}{rl} = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad li \,.\, sl = 2ql \,.\, lk$$

d. h. also, wenn man ql nochmals verlängert um sich selbst, sodass $oq = ql$, dann liegen die 4 Punkte o, i, k, r auf der Peripherie eines Kreises, in welchem ei und ok sich schneidende Sehnen sind. Da mir nun dieser Kreis durch die 3 Punkte r, i, k gegeben ist, so hat man nur die Senkrechte kl zu fällen, durch Verlängerung den Punkt o zu erhalten, ol zu halbiren und hat dann in qi die gesuchte Tangente.

Die im vorigen § gefundene Tangentengleichung muss, wie auf der Hand liegt, immer zusammengehörigen parallelen Tangenten entsprechen, mögen auch die Berührungspunkte wie natürlich verschiedene Coordinaten haben. Denn zu jedem Punkte links der Symmetrie Achse gibt es notwendig einen rechts derselben, dessen Tangente zur Tangente im Ersteren parallel ist. Es müsste also sein

$$\frac{y}{x}\,\frac{2x^2 - y^2}{x^2 - 2y^2} = \frac{y_1}{x_1}\,\frac{2x_1^{\,2} - y_1^{\,2}}{x_1^{\,2} - 2y_1^{\,2}}$$

Eine weitere Behandlung dieser Gleichung verlangt indes vorherige Verwandlung in die Coordinaten der Begrenzungscurve für xy. Dann ist:

$$\left(\sqrt{\frac{x^2y}{xy^2}}\right)^2 \frac{(2\sqrt{x^2y^4} - \sqrt{x^4y^2})^2}{(\sqrt{x^2y^4} - 2\sqrt{x^4y^2})^2} = \frac{(2x_1^{\,2} - y_1^{\,2})^2}{(x_1^{\,2} - 2y_1^{\,2})^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}}\frac{(2\sqrt{y^2} - \sqrt{x^2})^2}{(\sqrt{y_2} - 2\sqrt{x^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2}} \cdot \frac{(2\sqrt{S^2} - 3\sqrt{x^2})^2}{(\sqrt{S^2} - 3\sqrt{x^2})^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{S^3x^2} - 12\sqrt{S^2x^4} + 9\sqrt{x^6}}{\underbrace{S^2 - 6\sqrt{S^4x^2} + 9\sqrt{S^2x^4} - \sqrt{S^4x^2} + 6\sqrt{S^2x^4} - 9\sqrt{x^6}}_{S^2 - 7\sqrt{S^4x^2} + 15\sqrt{S^2x^2} - 9\sqrt{x^6}}}$$

$$= \frac{y_1^2(2y_1^2 - y_1^2)^2}{x_1^2(x_1^2 - 2y_1^2)^2}$$

$$(4\sqrt{S^2x^2} - 12\sqrt{y^2x^4} + 9\sqrt{x^6})x_1^2(x_1^4 - 2y_1^2)^2$$

$$= (S^2 - 7\sqrt{S^4x^2} + 15\sqrt{S^2x^4} - 9\sqrt{x^6})y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2$$

$$9\sqrt{x^6}[x_1^2(x_1^2 - 2y_1^2)^2 + y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2]$$

$$-3\sqrt{S^2xx^4}[4x_1^2(x_1^2 - 2y_{11}^2) + 5y_1^2(2x_1^2 = y_1^2)^2]$$

$$+\sqrt{S^4x^2}[4x_1^2(x_1^2 - 2y_1^2)^2 + 7y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2 = S^2y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2$$

Ich setze nun

$$x_1^2(x_1^2 - 2y_1^2)^2 = c \quad \text{und} \quad y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2 = d$$

dann lautet die Gleichung:

$$9\sqrt{x^6}(c+d) - 3\sqrt{S^2x^4}(4c+5d) + \sqrt{S^4x^2}(4c+7d] = S^2d$$

$$\sqrt{x^6} - 3\sqrt{S^2y^4}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)} + \sqrt{S^4x^2}\frac{(4c+7d)}{9(c+d)} = \frac{S^2d}{9(c+d)}$$

$$\left[\sqrt{x^2} - \sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]^3 - 3\sqrt{S^4x^2}\frac{(4c+5d)^2}{9^2(c+d)^2} + \sqrt{S^4c^2}\frac{(4e+7d)}{9(c+4)}$$

$$= \frac{S^2d}{9(c+d)} - \frac{S^2(4c+5d)^3}{9^3(c+d)}$$

$$\left[\sqrt{x^2} - \sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]^3 - \left[\sqrt{x^2} - \sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right] -$$

$$.\,3\sqrt{S^4}\left[\frac{(4c+5d)^2}{9^2(c+d^2)} - \frac{3(4c+7d)(c+d)}{9^2(c+d)^2}\right]$$

$$= \frac{S^2d}{9(c+d)} - \frac{S^2(4c+5d)^3}{9^3(c+d)^3} + \frac{2S^2(4c+5d)^3}{9^3(c+d)^3} - \frac{9S^2(4c+7d)(+d)}{9^2(c+d)^2}$$

$$\left[\sqrt{x^2} - \sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]^3 - \left[\sqrt{x^2} - \sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]$$

$$.\,3\sqrt{S^4}\left[\frac{16c^2 + 40dc^2 + 25d^2 - 12c^2 - 33dc - 21d^2}{9^2(c+d)^2}\right]$$

$$= c^2 + 7dc + 4d^2 = 4(c+d)^2 - dc$$

$$\frac{S^2}{2^3(6+d)^3}[d\,.\,9^2\,.\,(c+d)^2 + 2(4c+5d)^3 - 9^2(4c+7d)(c+d)^2]$$

$$= 9^4(c+d)^2(4c+7d-d = -9^2(c+d)^2(4c+6d)$$

$$= -\frac{S^2}{9^3(c+d)^3}[9^2(c+d)^2(4c+6d) - 2(4c+5d)^3]$$

$$= -\frac{2S^2}{9^3(c+d)^3}[9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]$$

Setze

$$\left[\sqrt{x^2}-\sqrt{S^2}\,\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]=p+q$$

$$p^3+3pr(p+r)+r^3)-(p+r)3\sqrt{S^4}\left[\frac{(4c+d)^2-dc}{9^2(b+d)^2}\right]$$

$$=-\frac{2S^6}{9^3(c+d)^3}[9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3]$$

setze

$$pr=\sqrt{S^4}\left[\frac{4(c+d)^2-dc}{9^2(c+d)^2}\right]r^3=\frac{S^4[4(c+d)^2--dc]^3}{9^5(c+d)_1p^3},$$

$$p^3+\frac{S^4[4(c+d)^2-dc]^2}{9_5(c+d)^6p^3}=-\frac{2S^2}{9^3(c+d)^3}[9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3]$$

$$p^6+\frac{2S^2p^3[q^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+4d)^3]}{9^3(c+d)^3}=-\frac{S^4[4(c+d)^2-dc]^3}{9^6(c+d)^6}$$

$$+\frac{S^9[q^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+3d)^3]^2}{9^6(c+d)^6}$$

$$+\frac{S^4[9^2(c+d)^2(2c+3d)-4c+5d^{32}}{9^6 c+d)^6}$$

$$p_3+\frac{S^2[9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3]}{9^8(c+d)^3}\Big\}^2$$

$$=\frac{S^4}{9^6(c+d)^6}[\{9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3\}^2=\{4(c+d)^2--dc\}^3]$$

Um zu sehen, ob der rechtsseitige Ausdruck überhaupt einen positiven Wert haben kann — wenn er das nicht könnte, wäre das Resultat imaginär und also die Lösung auf diesem Wege unmöglich — nehmen wir der Kürze halber einmal $c=d$ an, ein Fall, der eintritt, wenn die Tangente unter 45° geneigt. Dann wird die Klammer:

$$\{9^2\,.\,4c^2\,.\,5c-9^3c^3\}^2-18c^2-c^2\}^3=(9^2\,.\,20\,.\,c^3-9^3c^3)^2-15^3\,.\,c^6$$

hier kann b^6 ausfallen, da es nur auf den anderen Factor ankommt,

$$9^4\,.\,(20-9)^2-15^3=3^6\,.\,11^2-5^3\,.\,3^8=3^3(3^5\,.\,11^2-5^3)$$
$$=3^3(243\,.\,121-125)$$

was positiv bleibt; also hat die Gleichung eine richtige Lösung

$$p^3=-\frac{S^2[9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3[\pm S^2\sqrt{[9^2(c+d)^2(2c+4d(-(4b+5d)^3]^2-[4(c+d)^2-dc)^3}}}{9^5(c+d)^3}$$

$$p+r = \sqrt{x^2} - \frac{\sqrt{S^2}(4c+5a)}{6(c+d)} = \frac{\sqrt{S^2}}{9(c+d)}$$

$$\Bigg[\sqrt{\sqrt{9[\underbrace{{}^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3}_{\text{Klammer} = f^3 \text{ gesetzt}}]^2 \underbrace{-4(c+2)^2-dc]^3}_{= g^2 \text{ gesetzt}}} - [9^2(c+d)_2(2c+3d)-(4c+5)^3]}$$

$$-\sqrt{\sqrt{9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3]^2-[4(c+d)^2-dc]^3} + [9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3}\Bigg]$$

$$\sqrt{x^2} = \frac{\sqrt{S^2}}{9(c+d)}\Big\{(4c+5d+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^4} - \sqrt{\sqrt{f^6-g}+f^3}$$

$$\sqrt{y^2} = \frac{\sqrt{S^2}}{9(c+d)}\Big\{\underbrace{9c+9d-4c-5d}_{5c+4d} - \sqrt{\sqrt{f^6-g^5}+f^3}$$

$$+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}+f^3}\Big\}$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{S}}{3\sqrt{c+c}}\sqrt{[[(4c+5d)+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}=f^3} - \sqrt{\sqrt{f_1-g^6}+f^3}]}$$

$$\sqrt{xy^2} = x = \frac{S}{27\sqrt{(c+d)^3}}\Big\{5c+4d-\sqrt{\sqrt{f_1-g^6}-f^3}$$

$$+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^3}\Big\}\sqrt{4c+5d+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^3}-f^3-\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}+f^3}}$$

Wenn man bedenkt, dass schon c und d Grössen 6ten Grades sind, f und g also ebenfalls, so leuchtet die angegebene Complicirtheit des Ausdrucks ein, der allerdings ja gestattet, wenn $x_1 y_1$ gegeben sind, den Punkt xy zu bestimmen, dessen Tangente mit der in $x_1 y_1$ parallel läuft, niemals aber diese Bestimmung auf Grund irgend einer Beziehung zwischen $x_1 y_1$ und xy zulässt.

Die Verbindungslinie zwischen den Berührungspunkten zweier parallelen Tangenten ist ein Durchmesser der Curve, dessen Länge sich auf Grund der vorstehenden Formel für jeden einzelnen Fall berechnen lässt.

Die allgemeine Formel für diese Länge ist ihrer Cmplicirtheit wegen zu irgend welchen Operationen ganz untauglich und müssen wir uns daher darauf beschränken, einige specielle Fälle zu untersuchen.

Nachdem wir die Culminationspunkte, schon analysirt, deren Parallel-Tangenten die Achsen selbst sind, ist wesentlich der Fall von Interesse, wo die Tangenten der Symmetrie-Achse parallel laufen, also unter 45° gegen beide Achsen.

Dann ist $\operatorname{tg}\alpha = 1$ also

$$y_1(2x_1^2 - y_1^2) = x_1(x_1^2 - 2y_1^2)$$

$$2x_1^2 y_1 - y_1^3 = x_1^3 - 2x_1 y_1^2$$

$$x_1^3 + y_1^3 = 2x_1 y_1(x_1 y_1(x_1 + y_1)$$

dividire durch $(x_1 + y_1)$

$$x_1^2 + y_1^2 - x_1 y_1 = 2x_1 y_1$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 3x_1 y_1 = \sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2}$$

$$27 x_1^3 y_1^3 = S^2 x_1^2 y_1^2$$

$$27 x_7 y_1 = S^2$$

$$x_1 y_1 = \frac{S^2}{27}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 y_1 &= \frac{2S^2}{27} \\ x_1^2 + y_1^2 &= \frac{3S^2}{27} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} (x_1 + y_1)^2 &= \frac{5S^2}{27} \\ (x_1 - y_1)^2 &= \frac{S^2}{27} \end{aligned}$$

$$x_1 + y_1 = S\sqrt{\frac{5}{27}}$$

$$x_1 - y_1 = S\sqrt{\frac{1}{47}}$$

Inhalt des zw. beiden *Ro* einschl. Dreiecks

$$= \frac{x_1^2 - y_1^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\,.\,27} S^2$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} = \frac{S}{2\sqrt{27}}(\sqrt{5} \pm 1)$$

Da beide Tangenten-Berührungspunkte offenbar symmetrisch liegen, so ist das a des einen gleich dem y des andern und umgekehrt.

$$Rv = \sqrt{x_1^2 + k_1^2} = \frac{S}{2\sqrt{27}} \sqrt{5 + 1 + 2\sqrt{5} + 5 + 1 - 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{S\sqrt{12}}{2\sqrt{27}} = \frac{S}{3} = Rv$$

Der Ro im Berührungspunkt der 45^0 Tangente ist also ein Drittel der Constanten S und verhält sich zum Ro der Culminationspunkte wie $1 : \sqrt{2}$ d. h. wie die Seite eines Quadrats zur Diagonalen. Ferner ist der Durchmesser

$$D = (x_1 - y_1)\sqrt{2} = \frac{S\sqrt{2}}{2\sqrt{27}}(\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1) = \frac{S\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$$

$$= D = S\sqrt{\frac{2}{27}}$$

Dies war aber oben als x des y Culminationspunktes gefunden worden, mithin haben wir den neuen Satz entdeckt, dass der kleinste Durchmesser — denn das ist Obiger offenbar — gleich ist der Ordinate bzhw. Abscisse der Culminationspunkte.

Bestimmen wir den zwischen den Radiivectoren an dieser Berührungscurve den 45^0 Tangenten liegenden Winkel. Es ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x^2 - y^2}{4xy}$$

wo

$$x = \frac{S(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{27}}, \qquad y = \frac{S(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{27}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{S^2(6+2\sqrt{5}) - S^2(6-2\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)S^2} = \frac{4\sqrt{5}}{2 \,.\, 4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Für den Culminationspunkt ist der eingeschl. Winkel

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{4S^2}{27} - \frac{2S^2}{27}}{2 \,.\, 2\frac{S^2\sqrt{2}}{27}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Suchen wir noch zu obigen 2 Punkten der 45 Grad-Tangenten die entsprechenden Punkte der Begrenzungscurve. Wir hatten

$$x^2 = y_1 y$$

also

$$y = \frac{x^2}{y} = \frac{S^2(\sqrt{5}-1)^2}{S(\sqrt{5}-1)\,2\sqrt{27}} = \frac{S(6+2\sqrt{6})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)2\sqrt{27}}$$

$$= \frac{S(16+8\sqrt{5})}{8\sqrt{27}} = \frac{S(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{27}} = y$$

Ferner

$$y_1^2 = x \,.\, x, \quad x = \frac{y^2}{x^2} = x_1 = \frac{S(\sqrt{\sqrt{5}-2})}{\sqrt{27}}$$

$Ro = \sqrt{x^2+y^2} = S\sqrt{\frac{2}{3}} =$ gleich 3mal so gross wie der kleinste Durchmesser der Blattcurve.

Es ergeben sich nunmehr für den quäst. Punkt der 45° Tangente folgende Eigentümlichkeiten:

$$x \,.\, y = x \,.\, y = \frac{S^2}{27} \qquad x \,.\, y = \frac{S^2}{27}$$

$$a = \sqrt{Sx^2} = \frac{S}{3}\sqrt{9-4\sqrt{5}}, \quad b = \sqrt{Sy^2} = \frac{S}{3}\sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

$$a \,.\, b = \frac{S^2}{9}$$

$$m = \sqrt{S^2y} = \frac{S}{\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{5}+2}, \quad n = \sqrt{S^2x} = \frac{S}{\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

$$m \,.\, n = \frac{S^2}{3}$$

worin eine sehr merkwürdige Beziehung sich ausdrückt.

Das Dreieck, was durch Verbindung der Scheitel der Ellipse entsteht, ist also 1/3 von dem durch m, n und S gebildeten; das Dreieck aus den Coordinaten x, y und dem Ro ist dann 1/9 des letzteren.

[?] Wenn man die Endpunkte des kürzesten Durchmessers lh durch zu den Achsen parallele Linien mit dem auf der Symmetrie-Achse liegenden Punkte k verbindet, so entsteht das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck lkh und in diesem sind die Katheten

$$= \frac{lh}{\sqrt{4}} = \frac{S}{\sqrt{27}}$$

Da wir nun für den Culminationspunkt

$$y \text{ bzhw. } x = \frac{2S}{\sqrt{27}}$$

hatten, so ist

$$kh = \tfrac{1}{2}\, og$$

d. h. die Tangente unter 45⁰ halbirt og, da

$$kh = oi = \frac{og}{2}$$

Ebenso halbirt cl die Linie or.

„Demnach hat der kürzeste Durchmesser der Blattcurve die halbe Länge der Diagonale des umschriebenen Quadrats."

Nach allem Obigen ist die geometrische Construction der Culminationspunkte, der 45⁰ Tangenten und des kürzesten Durchmessers für eine gegebene Blattcurve äusserst einfach.

Nimmt man den zwischen 2 symmetrischen Radiivectoren eingeschl. Winkel zu 61⁰ an, so muss das Dreieck, welches durch Verbindung der Peripheriepunkte entsteht, notwendig ein gleichseitiges sein. Zur Bestimmung dieses Falles setzen wir also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x^2-y^2}{2xy} = \sqrt{3}$$

Dann ist

$$x^4 - y^2 = 2\sqrt{3}\,.\,xy$$

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 12x^2y^2$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 16x^2y^2 = (x^2 + x^2)^2$$

$$x^2 + y^2 = 4xy = \sqrt{S^2x^2y^2}$$

$$64x^3y^3 = S^2x^2y^2, \quad xy = \frac{S^2}{64}$$

$$\sqrt{Sxy} = \frac{S}{4} = \sqrt{x^4 + y^2} = Ro$$ (Siehe Figur vor. Seite.)

Wir erhalten also das überraschende Resultat, dass das in die Curve eingeschriebene gleichseitige Dreieck, welches mit einer Ecke im Anfangspunkt liegt, den 4ten Teil der Constanten S zur Seite hat. Bestimmen wir nun die Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{S^2}{16} \\ 2xy &= \frac{S^2}{32} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2\,.\,3}{32} \qquad & x+y &= \frac{S}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{32} \qquad & x-y &= \frac{S}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$x = \frac{S(\sqrt{3}+1)}{8\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{S(\sqrt{3}-1)}{8\sqrt{2}}$$

Die Punkte der Begrenzungscurve sind:

$$xy = \frac{S^2}{64} \quad \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{x} = 8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3} = 26+15\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{x} = (2+\sqrt{3})^3, \quad y = \frac{S}{8}\sqrt{(2+\sqrt{3})}, \quad x = \sqrt{\frac{S^2}{64(2+\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{S}{8}\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ro = \frac{S}{8}\sqrt{(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^6} = \frac{S}{8}\sqrt{52} = \frac{S}{4}\sqrt{13}$$

tg des eingeschl. Winkels beider symm. Rven = 26.

§ 13.

Ein besonderer Specialfall ist der, wenn die Verbindungslinie zweier parallelen Tangenten, also ein Durchmesser der Blattcurve, parallel zu einer Achse ist. Dieser Specialfall ist mit einem andern identisch. Nämlich zu jedem x gehören 2 verschiedene y (ausser dem Anfangs- und dem Culminationspunkt), wie zu jedem y zwei x und darum muss auch die Auflösung der Blattcurvengleichung nach x 2 Werte ergeben, wie auch die nach y. Für ein y hat also die Blattcurve 2 Schnittpunkte, deren Verbindungslinie gleich der Differenz der zwei x, d. h. $= x_1 - x_0$ ist. Entsprechend ist für ein x der verticale Durchmesser $= y_1 - y_2$. Für obigen Fall nun, wo die Schnittpunkte für ein x oder ein y zugleich Berührungspunkte paralleler Tangenten sind, ist diese Differenz ein Maximum. Denn vor diesen Schnittpunkten, d. h. wenn diese näher beim Anfangspunkt liegen, convergiren die Tangenten in demselben nach dem Anfangspunkt; jenseits dieser Schnittpunkte convergiren sie in entgegengesetzter Richtung, mithin muss in beiden Fällen der Durchmesser abnehmen.

Es ist

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= \sqrt{S^2x^2y^2} \\ x^2+y_1^2 &= \sqrt{S^2x^2y_1^2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y^2-z_1^2 &= \sqrt{S^2x^2}(\sqrt{o^2}-\sqrt{y_{1z}}) \\ \sqrt{y^4}+\sqrt{y^2y_1^2}+\sqrt{y_1^4} &= \sqrt{S^2x^2} \end{aligned}$$

Dividire durch letztere Klammer.

$$\sqrt{y_1^4}+\sqrt{y_1^2y^2}+\sqrt{\frac{y^4}{4}} = \sqrt{S^2x^2} - 3\frac{\sqrt{y^1}}{4}$$

$$\sqrt{y_1^2} = -\frac{\sqrt{y^2}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{S^2x^2}-3\frac{\sqrt{y^4}}{4}}\ .$$

$$\sqrt{y_1^3} = \frac{\sqrt{4\sqrt{S^2x^2}-3\sqrt{y^4}}-\sqrt{y^2}}{2}$$

$$\sqrt{S^2x^2} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{y^2}} \quad \text{eingeführt}$$

$$\sqrt{y_1^2} = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2-3y^2}-y}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{4x^2+y^2}-y}{2\sqrt{y}}$$

$$y_1^2 = \frac{(\sqrt{4x^2+y^2}-y)^3}{ry}$$

$$y_1 = \sqrt{\frac{(\sqrt{4x^2+y_2}-y)^3}{\sqrt{8y}}}$$

$$y-y_1 = y-\sqrt{\frac{(\sqrt{4x^2+y^2}-y)^3}{8y}}$$

dies müsste als Maximum behandelt werden, zu welchem Behufe aber die Ersetzung der einen Coordinate durch die andere erforderlich ist. Allein die bisher befolgte Methode sowol als auch das Differentiiren liefert für diesen Fall eine Gleichung so hohen Grades, dass eine Auflösung unmöglich ist. Es muss daher, wie folgt, verfahren werden:

Nach Einführung der Begrenzungscurven-Coordinaten ersetzt man erst auf Grund der Gleichung

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = \sqrt{S^2}$$

alle y durch x und setzt hiernach

$$\sqrt{x} = z\,.\,\sqrt{S}$$

worin z ein echter Bruch ist. Dann erhalten wir für den Durchmesser die Formel:

$$D = S\sqrt{1-z^2}[z^3 - \sqrt{0{,}5z[\sqrt{4(1-z^2)^3+z^2(3-2z^2)^2}-z(3-2z^2)]}$$

In diese setzt man nun successive für z von 1 ab fallende Werte ein.

$z =$	$D =$
0,95	unter 0,28 18 S
0,90	0,3224033 S
0,89	0,324 9398 S
0,88	0,325 05964 S
9,879	0,325 70555 S
. . . .	. . . . . .
2,8785	0,32569381 S
0,878	0,325 680338 S

Das Maximum liegt also kurz vor oder hinter 0,32570555 S. Man kann durch Uebergehen auf die nächste Decimalstelle der Einsetzungswerte die Genauigkeit noch weiter treiben, doch wird die Rechnung deshalb so ungeheuer mühevoll, weil alsdann sogar die Mantissen der Logarithmen schon kleine Irrtümer veranlassen, welche das Resultat beeinflussen und man daher gezwungen ist, alle Operationen ohne Hilfe der Logarithmen auszuführen.

Begnügt man sich mit dem Werte $z = 0{,}879$, so hat man

$$\sqrt{x} = 0{,}879\sqrt{S} \quad \text{und} \quad \sqrt{y} = 0{,}476\,821\sqrt{S}$$

$$\sqrt{y^2} = 0{,}227\,359\sqrt{S^2}, \quad \sqrt{x^2} = 0{,}772\,641\sqrt{S^2}$$

$$\sqrt{xy^2} = x_1 = 0{,}199\,848\,561\,S, \quad \sqrt{x^2y} = y = 0{,}368\,411\,454\,S$$

und

$$y_1 = 0{,}042\,705\,898\,S, \quad y - y_1 = D = 0{,}325\,705\,556\,S$$

$\operatorname{tg}\alpha$ des Winkels der Tangente mit der X Achse berechnet sich

$$= \frac{y}{x}\,\frac{2x^2-y^2}{x^2-2y^2} = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}444\,698 \quad \text{und} \quad \alpha = 23^0\,59' \text{ annähernd.}$$

Es muss also auch

$$\frac{y_1}{x}\,\frac{2x^2-y_1^2}{x^2-2y_1^2} = \operatorname{tg}\alpha$$

sein, was ein Versuch bestätigt.

§ 14.

Wenn man 2 symmetrisch liegende Hypotenusen S construirt, und auf diese die entsprechenden Senkrechten vom Anfangspunkt fällt, so ergibt sich eine weitere Eigentümlichkeit, die ad oculos die **Polargleichung** der Blattcurve demonstrirt, welche auf S bezogen, lautet:

$$Rv = \varrho = \frac{S \sin 2\alpha}{2}$$

Sie ergibt sich durch Einsetzen von

$$x = \varrho \cos\alpha, \quad y = \varrho \sin\alpha$$

$$\sqrt{\varrho^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \sqrt[3]{S \cos\alpha \,.\, \sin\alpha \,.\, \varrho^2}$$

$$\varrho = \sqrt[3]{S \,.\, \varrho^2 \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\alpha}$$

$$\varrho^3 = S \,.\, \varrho^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha, \quad \varrho = \frac{S \,.\, \sin 2\alpha}{2}$$

Es muss in der Figur offenbar Winkel

$$igf = vwi$$

sein; ausserdem, weil $ip \perp vw$, ist

$$vwi = vip$$

also auch

$$vip = igf$$

Verlängern wir nun ip bis sie gf in s trifft, so muss demnach in dem entstehenden Dreieck isg

$$gs = iz$$

sein, weil die gegenüber liegenden Winkel gleich sind. Daraus folgt aber weiter, dass eine Senkrechte von s auf ig, letztere als Grundlinie halbiren würde und da diese Senkrechte der X Achse parallel „So resultirt, „dass auch die Hypotenuse selbst in s halbirt ist.“ „so ist jede Senkrechte auf eine Hypotenuse zugleich in ihrer Verlängerung Mittellinie für die zu jener symmetrisch liegenden Hypotenuse.“ Dann ist also

$$gs = is = sf$$

und isf ist

$$= 2\alpha = igf + gis$$

Da nun $iu \perp gf$, so ist

$$iu = ip$$

und da

$$is = sf = \frac{S}{2}$$

so haben wir unmittelbar:

$$\sin 2\alpha = \frac{iu}{is} = \frac{\varrho}{S/2}$$

oder

$$\varrho = \frac{S}{2} \sin 2\alpha$$

wie oben entwickelt.

Der Punkt s liegt für alle Hypotenusen immer auf der Peripherie des mit $S/2$ um i beschriebenen Kreises. Wir haben hier also die Begründung für die Lübsen'sche die continuirliche Construction der Blattcurve mittelst deren Polargleichung; eine Begründung die Lübsen naturgemäss nicht liefern konnte, weil ihm die Herkunft der Curve unbekannt war.

Wenn wir nun auch die Polargleichung der Begrenzungscurve aufstellen wollen, so haben wir ebenso

$$x = \varrho \,.\, \cos\alpha, \quad y = \varrho \,.\, \sin\alpha$$

und

$$\sqrt[3]{\varrho^2}\,(\sqrt[3]{\cos^2\alpha} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha}) = \sqrt[3]{S^2}, \text{ mit 3 potenzirt:}$$

$$\varrho^2[\overbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}^{1} + 3\sqrt[3]{\cos^2\alpha \,.\, \sin^2\alpha}\,(\sqrt[3]{\cos^2\alpha} + 3\sqrt[3]{\sin^2\alpha})] = S^2$$

da nun

$$\sqrt[3]{\cos^2\alpha} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha} = \sqrt[3]{\frac{S^2}{\varrho^2}}$$

und wir diesen Wert einführen können. so ist die Gleichung:

$$\varrho^2 + 3\sqrt[3]{S^2 \varrho^4 \cos^2\alpha \,.\, \sin^2\alpha} = S^2$$

$$\cos\alpha \,.\, \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

also:

$$\varrho^2 + 3\sqrt[3]{S^2 \varrho^4 \frac{\sin^2 2\alpha}{4}} = S^2$$

Aus dieser und der obigen Gleichung lässt sich nunmehr eine dritte ableiten, welche die Beziehung zwischen den Radiivectoren beider Curven mit demselben Neigungswinkel ausdrückt. Nennen wir den Rv der Begrenzungscurve R, den der Blattcurve r, so ist offenbar:

$$R^2 + 3\sqrt[3]{R^4r^2} = S^2$$

woraus sich bei einem gegebenen Rv der andre finden lässt. Am leichtesten ist dies, wenn beide Radiivectoren ein festes geometrisches Verhältniss haben. Z B. es sei

$$R = 2r$$

d. h. der Rv an die Begrenzungscurve wird von der Blattcurve halbirt. Dann ist:

$$R^2+3\sqrt[3]{\frac{R^6}{4}} = S^2 = R^2\left(1+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right) = S^2, \quad R^2 = \frac{S^2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}+3}$$

$$x^2+y^2 = \frac{S^2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}+3} = \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^{x3}}-3\sqrt[3]{S^2x^2y^2} = S^2-3\sqrt[3]{S^2x^2y^2}$$

$$\frac{S^2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}+3} \text{ div durch } \sqrt[3]{S^2}$$

$$\sqrt[3]{S^4} - 3\sqrt[3]{x^2y^2} = \frac{\sqrt[3]{4S^4}}{\sqrt[3]{3}+4}$$

$$3\sqrt[3]{x^2y^4} = \frac{\sqrt[3]{4S^4}+3\sqrt[3]{S^4}-\sqrt[3]{4S^4}}{\sqrt[3]{4}+3} = \frac{4\sqrt[3]{S^4}}{\sqrt[3]{4}+3}$$

$$\sqrt[3]{x^2{}^2y} = \frac{\sqrt[3]{S^4}}{\sqrt[3]{4}+3}$$

$$x^2y^2 = \frac{S^4}{(\sqrt[3]{4}+3)^6}, \quad xy = \sqrt{\frac{S^2}{\sqrt[3]{4}+3)^3}}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= \frac{S^2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}+3} \\ 2xy &= (\sqrt{\frac{2S^2}{\sqrt[3]{4}+3)^3}}\end{aligned}\right\} \begin{aligned}(x+y)^2 &= S^2\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}+3}+(\sqrt{\frac{3}{\sqrt[3]{4}+3)^3}}\right] \\ (x-y)^2 &= S^2\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}+3}-\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{4}+3)^3}}\right]\end{aligned}$$

$$x+y = S\sqrt{\frac{4}{\sqrt[3]{4}+3}+(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}+3)^3}}}$$

$$x-y = S\sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}+3}-(\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{4}+3)^3}}}$$

ändere diese Werte ab, indem ich Zähler und Nenner mit $\sqrt{2}$ multiplicire:

$$x+y=\sqrt{\frac{2}{2+3\sqrt{2}}+\frac{2}{2+3\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{2+3\sqrt{2}}}}$$

oder setzen wir

$$\left.\begin{aligned} x+y &= S\sqrt{k+k\sqrt{k}} \\ x+y &= S\sqrt{k-h\sqrt{k}} \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{S}{2}\left[\sqrt{k-k\sqrt{2}}+\overline{k-k\sqrt{k}}\right]$$

$$y = \frac{T}{2}\left[\sqrt{h+k\sqrt{k}}-\sqrt{k-k\,.\,k}\right]$$

$$\frac{2+3\sqrt{2}}{2}=1$$

$$\frac{x}{y}=\frac{S}{\sqrt{2+3\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{\sqrt{4}-3\pm\sqrt{3}}{\sqrt{4}+3}}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{k+k\sqrt{k}}}{\sqrt{k+k\sqrt{k}}}=\frac{k+k\sqrt{k}+k-k-2\sqrt{k^4-k^3}}{k+k\sqrt{}-k+\sqrt{k}}=\frac{k-\sqrt{k^2-k^3}}{k\sqrt{k}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}=\sqrt{\frac{2+3\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{2+3\sqrt{2}}{2}-1}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}}-\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{\sqrt{4}+3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{4}+3}{\sqrt{4}}}-\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}}=\sqrt{4+\frac{3}{\sqrt{4}}}$$

$$-\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}}$$

Ebenso für $R=3r$. Es ist

$$R^2+3\sqrt{\frac{R^2}{9}}=S^2=R^2(1+<3)\quad\text{und}\quad R^2=\frac{S^2}{1+\sqrt{3}}$$

$$x^2+y^2=\frac{S^2}{1+\sqrt{3}}=S^2-3\sqrt{S^2x^2y^2},\quad 3\sqrt{S^2x^2y^2}=\frac{S^2+\sqrt{3}\,.\,S^2-T^2}{1+\sqrt{3}}$$

durch $\sqrt{S^2}$

$$\sqrt{x^2y^2}=\frac{\sqrt{S^4}}{\sqrt{9(1+\sqrt{3})}},\quad \sqrt{xh}=\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{3}\sqrt{(1+\sqrt{3})}}$$

$$xy=\frac{S^2}{3(\sqrt{1+3\sqrt{3}})^2}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{1+\sqrt{3}}{S^2} \\ 2xy &= \frac{2S^4}{3(\sqrt{1+\sqrt{3}})^3} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{1+\sqrt{3}}\left(1+\frac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{3}}}\right) \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{1+\sqrt{3}}\left(1+\frac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{3}}}\right) \end{aligned}$$

$$x+y = \frac{S}{\sqrt{4+\sqrt{2}}}\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}$$

$$x-y = \frac{S^2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}$$

$$x = \frac{S}{2\sqrt{1+\sqrt{3}}}\left(\sqrt{2\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}+\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}\right)$$

$$y = \frac{S}{2\sqrt{1+\sqrt{3}}}\left(\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}-\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}\right)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}-\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}}{\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}+\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2+3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2-2\sqrt{9+9\sqrt{3}-4}}{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2-3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}$$

$$= \frac{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-\sqrt{5+9\sqrt{3}}}{2} = \mathrm{tg}$$

§ 15

Wir fanden § 10, dass im Culminationspunkte der Blattcurve die zugehörige Hypotenuse S in 1/3 ihrer Länge geteilt wird, und es war der entsprechende Rv der Begrenzungscurve $= \frac{T}{\sqrt{3}}$. Sucht man nun den Fall, wo S in 1/3 der Länge geteilt wird, so haben wir unmittelbar:

$$Rv = \sqrt{ab} = \sqrt{x^2+q^2} = \frac{S\sqrt{3}}{4}.$$

und da das zwischen den beziehlichen Punkten von S liegende Stück $= S/2$, so ist der Rv der Begrenzungscurve

$$= \sqrt{\frac{S^2 \cdot 3}{16}+\frac{S^2}{4}} = \frac{S}{4}\sqrt{7}$$

Der Rv an diesen Punkt der Blattcurve ist also gleich 3/4 der obigen Rv an die Begrenzungscurve für den Culminationsfall. Ferner ist:

$$\sqrt{Sxy} = \frac{S\sqrt{3}}{4}, \quad Sxy = \frac{S^3 \,.\, 3\sqrt{3}}{64}, \quad xy = \frac{S^2 \,.\, 3\sqrt{3}}{64}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{S^2 \,.\, 3}{16} \\ 2xy &= \frac{S^2 \,.\, 3\sqrt{3}}{32} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{32}(6+3\sqrt{3} \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{32}(6-3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$x+y = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{3(2+\sqrt{3})}{2}}$$

$$y-x = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{3(2-\sqrt{3})}{2}}$$

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{S\sqrt{3}}{S\sqrt{2}}\left[\sqrt{2+\sqrt{3}} \mp \sqrt{2-\sqrt{3}}\right] \quad \text{und}$$

$$x^2+y^2 = S^2 - 3\sqrt{S^3x^2y^2} = S^2 - \frac{3S^2 \,.\, 3}{16} = \frac{S^2 \,.\, 7}{16}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{7 \,.\, S^2}{16} \\ 2xy &= \frac{S^2\sqrt{3}\sqrt{3}}{32} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{32}(14+3\sqrt{3}) \\ (x-y) &= \frac{S^2}{32}(14-3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$x+y = \frac{S}{4\sqrt{2}}\sqrt{14+3\sqrt{3}}$$

$$x-y = \frac{S}{4\sqrt{2}}\sqrt{14-3\sqrt{3}}$$

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{S}{3\sqrt{2}}\left[\sqrt{14+3\sqrt{3}} \pm \sqrt{14-3\sqrt{3}}\right]$$

Diese Ausdrücke lassen sich vereinfachen, indem man quadrirt; so ist z. B.:

$$x^2 = \frac{S^2}{128}\left[14+3\sqrt{3}+14-3\sqrt{3}+1\sqrt{\underbrace{14^2-27}_{169}}\right]$$

$$= \frac{S^2}{128}[28+26] = \frac{S^2 \,.\, 27}{64} \quad \text{also} \quad x = \frac{S \,.\, 3\sqrt{3}}{8}$$

$$y^2 - \frac{S^2}{128}[14+3\sqrt{3}+14-3\sqrt{3}-2\,.\,13]\frac{S^2\,.\,2}{128} - \frac{S^2}{64},\ \frac{S}{8} - y$$

Entsprechend

$$x^2 = \frac{S^2\,.\,3}{128}[2+\sqrt{3}+2 \mid \sqrt{3}2\sqrt{4-3}] - \frac{S^2\,.\,3\,.\,2}{128} - \frac{S^4\,.\,3}{64}$$

$$x = \frac{S}{8}\sqrt{3} - \frac{x}{3}$$

$$y^2 = \frac{S^2\,.\,3}{128}[2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\underbrace{\sqrt{4-3}}_{1}] = \frac{S^2\,.\,3\,.\,6}{128} = \frac{S^2\,.\,9}{64}$$

$$y - \frac{S\,.\,3}{8} - 3y$$

Demnach

$$n - x+x^2 - \frac{S\sqrt{3}+S3\sqrt{3}}{8} = \frac{S\sqrt{3}}{9} - 2 \text{ Rvbl.}$$

$m - y+y = \frac{S}{2},\ \frac{m}{S}$ – sin des Neigungswinkels $= \frac{1}{2}$, mithin ist dieser „Neigungswinkel — 30° und wir finden den Satz, dass die Hypotenuse S unter 30° von der Begrenzungs- und Blattcurve in 1/4 der Länge geteilt wird.“

In diesem Falle hat der Rp der Blattcurve natürlich eine Neigung von 60° und der ihm symmetrische eine solche von 30°; beide Radiivectoren der Blattcurve teilen somit den rechten in 3 gleiche Teile.

Die Blattcurve hat noch einen besonders charakteristischen Punkt, den wir nunmehr aufsuchen wollen. Es entsteht durch 2 symmetrische Radiivectoren und den zugehörigen Durchmesser allemal ein in die Curve eingeschriebenes gleichschenkliges Dreieck. Wenn man von allen diesen Dreiecken, die mit dem Inhalt 0 beginnen und auf der Symmetrie-Achse wieder mit 0 endigen das Maximal-Dreieck sucht, so ergeben sich eigentümliche Beziehungen. Die allgemeine Formel für den Inhalt dieses Dreiecks ist

$$J = \frac{x^2 - y^2}{2}$$

wovon wir jetzt das Maximum suchen wollen. Der Nenner 2 kann wegbleiben, und dann führen wir wieder die Coordinaten der Begrenzungscurve ein.

$$2J = \sqrt[3]{x^2y^4} - \sqrt[3]{x^4y^2} > (\sqrt[3]{x^2} \pm z)(\sqrt[3]{y^4} \mp 2z\sqrt[3]{y^2}]$$
$$- (\sqrt[3]{x^4} \pm 2z\sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{y^2} \mp z)$$

$$\sqrt[3]{x^2y^2} - \sqrt[3]{x^2y^6} > \sqrt[3]{x^2y^4} \pm z\sqrt[3]{y^4} \mp 2z\sqrt[3]{x^2y^2} - \sqrt[3]{x^4y^2} \mp 2z\sqrt[3]{x^2y^2} \pm z\sqrt[3]{x^4}$$

$$4z\sqrt[3]{x^2y^2} > z(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{y^4})$$

div. durch z und 0 gesetzt:

$$4\sqrt[3]{x^8y^2} = \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{y^4}$$

$$6\sqrt[3]{x^2y^2} = \sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^4} = (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^2 = \sqrt[3]{S^4} = 6\sqrt[3]{x^2y^2}$$

$$6^3x^2y^2 = S^4, \quad xy = \frac{S^2}{6\sqrt{6}}, \quad S^2 = 6\sqrt[3]{S^2x^2y^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S^2}{3\sqrt{6}} = 2xy \\ \dfrac{S^2}{6} = x^2+y^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (x+y)^2 = \dfrac{S^2}{6\sqrt{3}}(\sqrt{6}+2) = \dfrac{S^2}{6\sqrt{3}}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ (x-y)^2 = \dfrac{S^2}{6\sqrt{3}}(\sqrt{6}-2) = \dfrac{S^2}{3\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \end{array}$$

$$x+y = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}}$$

$$x-y = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}}$$

$$x = \frac{S}{2}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{3\sqrt{\sqrt{3}}}\right. \text{ vereinfacht } x = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}}$$

$$y = \frac{S}{2}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{6}\sqrt{3}}\right] \text{ vereinfacht } y = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$Rv = S/2\,\sqrt{}$[illegible] $= 1^1/_2$ kleinsten Durchm.

Demnach ist J des eingeschlossenen Dreiecks

$$\frac{x^2-y^2}{2} = \frac{S^2}{12\sqrt{6}} \text{ als Maximum}$$

Die Tangente des eingeschlossenen Winkels im Anfangspunkt ist

$$-\frac{x^2-y^2}{2xy} = \frac{S^2 \cdot 6\sqrt{6}}{12\sqrt{3}\,S^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

d. h. die Hypotenuse S, welche auf einem Rv senkrecht steht, wird von der Verlängerung des anderen so geschnitten, dass das Stück zwischen beiden sich zum Rv verhält, wie die Seite des Quadrats zur Diagonale. Es sind in diesem Falle die Coordinaten des zugehörigen Punktes der Begrenzungscurve:

$$x = S\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)^3}, \quad y = S\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)^3} \quad \text{und} \quad Rv = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Der hier gefundene Punkt der Blattcurve für das Maximal-Dreieck, was sich in dieselbe einschreiben lässt, hat nun auch die weitere Eigenschaft, dass die in den symmetrisch liegenden „Punkten an die Curve gezogenen Tangenten den Radiivectoren beziehlich parallel sind", d. h. dass Radiivectoren und Tangenten zusammen einen Rhombus bilden. Dies können wir auf Grund des § 12 gefundenen Umstandes nachweissen, dass das Product der Tangenten der Winkel zwischen 2 symmetrischen Radienvectoren und der Tangente an die Curve mit dem Rv constant $= \frac{1}{2}$ ist.

Ist in nebenstehender Figur

$$\operatorname{tg} S \,.\, \operatorname{tg} E = \frac{1}{2}$$

so folgt, da wir $\operatorname{tg} E$ für diesen Fall $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ ermittelt hatten, dass auch

$$\operatorname{tg} S = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

sein muss, d. h.

$$\text{Wkl. } E = \text{Wkl. } S$$

und somit Tangente

$$sp = Rv\,or$$

Dasselbe gilt natürlich für die symmetrisch liegende Tangente und Rv; daher sich beide Tangenten auf der Symmetrie-Achse schneiden müssen. Der Abstand dieses Punktes vom Anfangspunkt ist

$$= \sqrt{2(x+y)} = \sqrt{2}\,.\, S\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}} = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}$$

Die kleine Diagonale dieses Rhombus ist

$$= (v-y)\sqrt{2}, \quad \text{also} \quad = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}$$

Wenn

$$\operatorname{tg} E = \frac{1}{2} \quad \text{so muss} \quad \operatorname{tg} \delta = 1, \quad \text{also} \quad \delta = 45^0$$

sein. Dann ist aber auch der Winkel zwischen S und dem zugehörigen Rv der Begrenzungscurve $= 45^0$, mithin ferner auch der zwischen beiden zusammengehörigen Radiivectoren beider Curven.

Dann aber ist die „Tangente an die Blattcurve dem Rv an die Begrenzungscurve parallel," die symmetrischen Lagen desgl., und somit bilden beide Tangenten und beide Radiivectoren wiederum einen Rhombus, dessen Inhalt sich wie folgt, berehnen lässt: Es ist

$$\frac{a-b}{\sqrt{ab}} = 1, \quad \sqrt{ab} = a-b, \quad \sqrt{\sqrt{S^2x^2y^2}} = \sqrt{S}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}, \quad \sqrt{x^2} - \sqrt{xy} = \sqrt{y^2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{y}{2}} + \sqrt{\sqrt{y^2\tfrac{4}{6}}} = \frac{\sqrt{y}(1+\sqrt{5})}{2}. \quad \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} x = \frac{8}{(1+\sqrt{3})^3} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}-2$$

Der symmetrische Rv hat also die umgekehrte Tangente und die Gleichung

$$y = x(\sqrt{5}+2)$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{6}+1}, \quad \frac{x(\sqrt{5}+1)}{2} = a \quad \text{also}$$

$$x + \frac{x^2(\sqrt{5}+1)^2}{4} = \sqrt{S^2x^3\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}} = \frac{x^2}{4}(5+2\sqrt{5}+1+4).$$

$$= \frac{x^2}{4}(10+2\sqrt{5}) = x^2\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{6}$$

$$x^6 \frac{5\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)^3}{8} = \frac{S^2x^4(\sqrt{5}+1)^2}{4}$$

$$x^2\frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{S^2}{\sqrt{(5+1)}}$$

$$x = S\sqrt{\frac{2}{5\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}} = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}$$

$$y = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2^2}} = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}}$$

Die Tangente muss also durch diesen Punkt gehen und die Winkel-Tangente

$$\frac{y}{x} = \sqrt{5}-2$$

haben. Ihre Gleichung lauter daher:

$$y = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} = (\sqrt{5}-2)\left(x - S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}}}\right)$$

Wo sich Tangente und Ry treffen, muss also

$$y = x(\sqrt{5}+2)$$

sein. Dies führen wir ein, um die Coordinaten des Punktes zu erhalten:

$$\overset{x}{y}(\sqrt{5}+2) = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} - (\sqrt{5}-2)\left(x - S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}\right)$$

$$x\sqrt{5}+2x = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} + x\sqrt{5}-2x - S(\sqrt{5}-2)\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}$$

$$4x = S\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} - (\sqrt{5}-2)\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}\right)$$

letzterer Ausdruck lässt sich vereinfachen als:

$$\frac{S}{\sqrt{10\sqrt{5}}}\sqrt{\sqrt{}(5+1)+\underbrace{(\sqrt{}-2)^2}_{\underbrace{5+4}_{9}-4\sqrt{5}}(\sqrt{}-1)-2(\sqrt{}-2)\underbrace{\sqrt{5}-1}_{4}}$$

$$= \frac{S}{\sqrt{10\sqrt{5}}}\sqrt{\sqrt{5}+1+9\sqrt{5}-20-9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}+8}$$

$$= 4x = S\sqrt{\frac{10\sqrt{5}-20}{10\sqrt{5}}} = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}$$

$$x = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}},\quad y = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{5}+2)^2}$$

$$y = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}} \quad \text{tg des eingeschl. Winkels} = 2.$$

Dies sind die Coordinaten des Schnittpunktes zwischen Tangente und Radiusvector.

Der Inhalt des Dreiecks zwischen 2 symmetrisch liegenden Linien ist nun

$$= \frac{x^2 - y^2}{2}$$

also der des Rhombus das Doppelte

$$= x^2 - y^2$$

bzhw. weil hier $y > x$ muss es lauten $y^2 - x^2$. Mithin

$$J = \frac{S^2}{16}\left(\frac{\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{oder} \quad J = \frac{S^2}{4\sqrt{5}}$$

Der erste Fall des Maximal-Dreiecks in der Blattcurve ist leicht zu construiren, weil die Tangente des eingeschlossenen Winkels am Scheitel

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ist und jeder Rv Mittellinie zur Hypotenuse S des andern Rv ist. Dann ist in Figur 18

$$\frac{pq}{op} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

also das Verhältniss von Seite und Diagonale im Quadrat. Dasselbe besteht für $rv : vr$. Mithin verfährt man wie folgt: Lege S horizontal hin $= cd$, schlag einen Halbkreis darüber, errichte in der Mitte von S die Senkrechte fg, ziehe die Sehne cf und trag diese auf der Seite ce nach oben ab

$$ce = cf = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Verbinde nun e mit g, wo diese Linie den Kreis trifft, in h, verbinde ich mit c und d, so entspricht hc die Kathete m, hd der Kathete n und die Senkrechte auf cd, hi ist einer, hg der andre der gesuchten Radiivectoren.

Im zweiten Falle hatten wir

$$E = {}^1/_2$$

die Construction ist der Obigen ganz analog, da es nicht schwer hält, den betr. Winkel von der Mitte von S aus anzulegen.

§ 16.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch einer besonderen Beziehung der Begrenzungscurve zur Ellipse Erwähnung tun. Der Rv. der Begr.-Curve ist

$$= \sqrt{x^2+y^2}$$

derjenige der Blattcurve für zusammengehörige Punkte

$$= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Sxu} = \sqrt{Sxy}$$

also Summe der Quadrate der Radiivectoren

$$= x^2+y^2+\sqrt{S^2x^2n^2} = (\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}-\sqrt{x^2y^2})(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})+\sqrt{S^2x^2y^2}$$
$$= \sqrt{S^2}(\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4})$$
$$\sqrt{S^2x^4} = a; \quad \sqrt{S^2y^4} = b$$

also „Summe der Radiivectoren-Quadrate"

$$= a^2 + b^2$$

also gleich der Summe der Quadrate der Ellipsen-Achsen. Das ist nun eine Eigenschaft der sog. conjugirten Durchmesser, und da unser Ro an die Begrenzungscurve ein Durchmesser ist, so muss der Rv an die Blattcurve gleich dem conjugirten Durchmesser sein. Ferner ist aber jener conjugirte Durchmesser parallel zur Tangente im Endpunkt des andern; somit muss der conjugirte Durchmesser zum Ro der Begrenzungscurve parallel laufen zur Hypotenuse S und die Länge des Ro zur Blattcurve haben. Darum ist

$$\text{Wkl. } foh = rso$$

und wenn br Mittellinie an S ist, so muss, wenn wir auf diesen

$$oe = op$$

machen, e ebenfalls ein Punkt der Ellipse sein, der dem Endpunkt des conjugirten Durchmessers symmetrisch liegt. Der eingeschlossene Winkel zwischen den conjugirten Durchmessern $fo(xy)$ ist nun

$$= po(xy) + 1R$$

also

$$\sin fo(xy) = \cos po(xy) = \frac{po}{o(xy)} \frac{\sqrt{^2x+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Folglich ist das Product der beiden Rven mit dem sin des eingeschl. Winkels

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2 = ab$$

Wir hatten bisher nur eine (oder mit der Lübsen'schen) 2 discontinuirliche Construction der Blatt- und Begrenzungscurven kennen gelernt. In beifolgender Figur wird jedoch auch eine continuirliche veranschaulicht. Es sei ab die Hypotenuse R. Wenn diese im Mittelpunkte c durch den Radius

$$S/2 \equiv oc$$

mit o fest verbunden wird, so lässt sich oc um o drehen, wodurch der Kreisbogen $mfcn$ entsteht und gleichzeitig gleitet a auf der Y-Achse, b auf der X-Achse entlang, so dass S alle Lagen innerhalb der Begrenzungscurve durchläuft. Errichtet man auf ab in c eine feste Senkrechte

$$ce = S/2$$

welche bei allen Lagen von S immer senkrecht darauf bleibt, und ergänzt die beiden Linien oc und ce durch die beiden of und cf (beide $= S/2$) zu einem Rhombus, so wird dieser mit der Drehung von T seinen Wkl. α ändern. Derselbe wird $= 1R$, wenn S auf einer Achse liegt, und wird $= 0$, wenn S unter 45^0 geneigt steht; immer muss $of = ce$ sein und somit senkrecht auf ab stehen. Dann ist der Kreuzungspunkt von of und ab immer ein Punkt der Blattcurve. Nun bringt man an diesen Kreuzungspunkt d einen Stift an, der auf beiden Linien gleiten kann und dieser wird dann, wenn ab alle Lagen durchläuft, genau die Blattcurve aufzeichnen. Durch Anordnung desselben Rhombus auf der rechten Seite von ce und Verbindung der beiden Ecken f und g durch das Kniegelenk fhg, dessen Kniepunkt h auf hce gleiten kann, lässt es sich erreichen, dass der Abstand ad immer gleich dem Abstand kb ist und somit ist der Schnittpunkt von gi und ab — k — immer ein Punkt der Begrenzungscurve. Durch Anbringung eines auf beiden Linien gleitenden Stiftes ist also auch hier die Möglichkeit continuirlicher Aufzeichnung der Begrenzungscurve gegeben.

Uebrigens lässt sich die Lübsen'sche discontinuirliche Construction der Blattcurve in folgender Weise sehr vereinfachen: Man teilt in Figur die rechte Hälfte eines mitten auf der Y-Achse liegenden und die X-Achse von oben berührenden Kreises mit dem Durchmesser $= S/2$ in eine gerade Anzahl gleicher Bogenstücke ein. Alsdann verbindet man sämtliche Teilpunkte von dem Viertelkreise bei 1 beginnend mit dem Anfangspunkte 0 durch Radiivectoren und zieht zugleich von allen Teilpunkten die zur Y Achse parallelen Sehnen 1I, 2II, 3III etc. Die Winkel zwischen 2 aufeinander folgenden Radiivectoren müssen demzufolge, weil auf gleichen Bogen

stehend alle gleich sein. Rechnen wir nun unsren Polarwinkel von Ro. $o1$ ab, so ist allemal die zugehörige Sehne

$$= \frac{S}{2} \sin 2\alpha$$

Denn wenn man z. B. vom Teilpunkt 8 aus den Durchmesser $8c$ zieht, c mit VIII verbindet $= cd$, so ist der Winkel

$$8ca = 2\alpha$$

weil Peripheriewinkel auf dem doppelten Bogen wie α ($8b1$). Dieser Winkel hat den

$$\text{sinus} = \frac{\text{Sehne } 8\,\text{VIII}}{S/2}$$

also

$$\text{Sehne } 8\,\text{VIII} = S/2 \sin 2\alpha = \varrho$$

Man braucht mithin nur die zugehörigen Sehnen vom Anfangspunkt auf die entsprechenden Radiivectoren abzutragen, um successive alle Punkte der Blattcurve zu erhalten. Beim Radiusvector $1o$ ist die Sehne $= 0$, die Curve beginnt also in o und tangirt den $Roo1$. Auf der Y-Achse ist die Sehne

$$= S/2 \quad \text{also} \quad \tfrac{1}{2} = S/2$$

was der Symmetriepunkt ist. Auf diese Weise erhält man, ohne den Winkel jedesmal verdoppeln zu müssen, sofort unmittelbar den betr. Radiusvector.

§ 17.

Nachdem wir die sonstigen Eigenschaften der Begrenzungs- und Blattcurve ziemlich gründlich kennen gelernt, rücken wir nun 2 Fragen näher, deren Lösung schwieriger scheint: die nach Inhalt und Umfang der besagten 2 Curven. Diese Probleme erscheinen bei Curven 3ten Grades besonders verwickelt und ich gestehe, dass ich lange nicht glaubte, sie in befriedigender Weise, namentlich ohne Beihülfe der Integral-Rechnung, lösen zu können. Dass dies mir aber dennoch und zwar auf merkwürdig einfache Weise geglückt ist, beweisst nicht nur, dass unermüdliche Ausdauer viel vermag, sondern auch, dass vielleicht noch manche Probleme nur an der richtigen Stelle angefasst zu werden brauchen, um spielend ihre Lösung zu finden, auf die solange nicht verfallen zu sein, man sich nachher wundert. So ist es denn auch Lübsen ganz entgangen, dass seine discontinuirliche Contruction der Blattcurve mittelst deren Polar-

gleichung den Schlüssel enthält zur mathematisch genauen Bestimmung ihres Inhalts. Figur 20 gibt darüber Aufschluss, indem wir nachfolgende Betrachtung anstellen.

Der Radius des Kreises sei $S/2$. Links von der Y-Achse ist die Blattcurve eingezeichnet. Den Viertelkreisbogen, in dem diese liegt, teilen wir in eine unendliche Zahl unendlich kleiner gleicher Teile ein. Gleichzeitig teilen wir den Halbkreis rechts der Y-Achse in die g l e i c h e Anzahl gleicher Teile.

Diese Zahl soll als eine gerade gelten und es werden also die Bogenteile des Halbkreises doppelt so gross sein, wie die des $^1/_4$ Kreises. Wir ziehen nun von den Teilpunkten die mit der Y-Achse parallelen Sehnen 1—1, 2—2, 3—3 etc.; wo diese die X-Achse schneiden, verbinden wir die Treffpunkte a, b, c, d, e, f, g, h mit den Teilpunkten 8, 7, 6, 5, 4 etc. und ziehen zugleich die zur Y-Achse parallelen Halbsehnen aa, bb, cc etc. Nun sind sämtliche Centriwinkel des rechten Quadranten bei o doppelt so gross, wie die Centriwinkel des linken Quadranten, weil Bogen h 1 doppelt so lang wie Bogen I II und so fort. Deshalb ist der Ro der Blattcurve o—1 gleich der Halbsehne 1—1, $Rv\,o-2 = \frac{2-2}{2}$, $Rv\,o-3 = \frac{3-3}{2}$ u. s. fort.

Die Peripheriewinkel bei 8, 7, 6 . . . sind aber gleich den Centriwinkeln des linken Quadranten, weil auf den doppelten Bogen stehend. Ferner ist Wkl. $a_1 a-7$ = Wkl. 8, Wkl. $b_1 b-6$ = Wkl. 7 etc., da ihre Schenkel parallel sind. Da die Winkel 8, 7, 6, 5 . . . auf gleichen Bogen stehend, alle gleich sind, müssen es auch die Winkel $a_1 a-7$, $b_1 b-6$, $c_1 c-5$ . . . sein. Die Winkel $88a$, $77a$, $66c$, $55d$ sind naturgemäss gleich den Winkeln bei 8, 7, 6 . . . und auch wiederum gleich den Winkeln $8aa$, $7bb$, $6cc$, woraus resultirt, dass die Winkel $8a7-7b6$ . . . durch die Linien $aa_1 - bb_1$ . . . halbirt werden. So sind denn auch die Winkel IvII — IoIII . . . gleich den Winkeln $a_1 a 7 - b_1 b 6$ . . . etc.

Wenn nun die Teilung eine unendlich kleine ist, so wird der Unterschied zwischen den Linien $a7$ und $7i$, sowie $b6$ und $6k$ verschwinden, ebenso kann aa_1 gleich ik und bb_1 gleich $k6$ angesehen werden; dasselbe gilt aber für die aufeinander folgenden Dreiecke $8o7$, $7o6$, $6o5$ in der Blattcurve, welche allemal als unendlich schmale gleichschenklige Dreiecke betrachtet werden können, deren Inhalt sich durch das Quadrat einer Seite mal dem halben eines des eingeschlossenen Winkels ausdrücken lässt. So ist J des Dreiecks

$$8o7 = \frac{7o^2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

Der J des Dreiecks $a_1 a 7$ ist gleich $\frac{a7^2 \cdot \sin\alpha}{2}$, oder da $a7 = i7$ wird

$$J = \frac{i7^2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

Nun ist $i7$ nach der Lübsen'schen Construction $= Rv\,7o$, mithin J von Dreieck $7o8 = J$ von Dreieck $a_1 a 7$; ebenso Dreieck $7o6 =$ Dreieck $b_1 b 6$ und so fort, Dreieck $a_1 a 7$ ist jedoch bei unendlich kleiner Teilung $= {}^1/_4$ des Kreisstückes $8oi7$, Dreieck $b_1 b 6 = {}^1/_4$ von $7ik6$ und so weiter. Somit ist die Summe aller Dreiecke $a_1 a7 - b_1 b6 - c_1 c5 - d_1 d4$ gleich ${}^1/_4$ des Viertelkreises $8bh$ und somit auch der Inhalt der halben Blattcurve. Dann ist der Inhalt der ganzen Blattcurve gleich der Hälfte des Viertelkreises oder

$$J = \frac{\pi S^2}{32}$$

Auf Grund dieses Resultats ist nun auch die Ermittlung des Inhalts der Begrenzungscurve möglich und zwar in folgender Weise. Denken wir uns zwei unendlich nahe aufeinander folgende Lagen zweier Hypotenusen S, z. B. de und gf. Dann kann der Schnittpunkt beider als Punkt der Begrenzungscurve angesehen werden. Der ganze Inhalt der Begrenzungscurve setzt sich nun aus unendlich vielen Successionen von Dreiecken zusammen, welche, wie gpd und fpe durch 2 unendlich nahe Tangenten und die Achsen gebildet werden. Die Summe dieser Dreiecke ergibt also den Inhalt des von den Achsen und der Begrenzungscurve eingeschlossenen Raumes; jedoch ist zu beachten, dass jedes Dreieckspaar eine symmetrische Lage über und eine unter der Symmetrie-Achse hat, der ganze Raum also von den Dreiecken 2 mal ausgefüllt wird und mithin die Hälfte von deren Summe zu nehmen ist.

Richten wir nun die Succession der Tangenten so ein, dass der eingeschlossene Winkel bei p immer derselbe bleibt, und fallen die Senkrechten von o auf die Tangenten — oi und oh — so ist der zwischen letzteren eingeschlossene Winkel ioh ebenfalls

$$= \text{Wkl. } gpd = \text{Wkl. } epf$$

und da diese Senkrechten Radiivectoren der Blattcurve sind, so schliesst die Succession der aufeinander folgenden Radiivectoren der Blattcurve immer den gleichen Winkel ein, wie die Tangenten, den

wir α nenen wollen. Für 2 unendlich nahe Tangenten kann der Längenunterschied zwischen gp und dp, sowie pe und pf als verschwindend betrachtet werden, desgleichen auch für die Radiivectoren vt und vh. Demnach lässt sich der eines Dreieckspaares ausdrücken mit: $\frac{\sin\alpha}{2}(gp^2+pf^2)$t doch können wir nach früherer Gepflogenheit auch setzen

$$gp = a_1 \quad \text{und} \quad pf = b_1$$

also Dreiecke

$$= \frac{\sin\alpha}{2}(a_1^2+b_1^2)$$

und die Summe aller Dreieckspaare $= 2J$ der Begrenzungscurve

$$= \frac{\sin\alpha}{2}[a_{,}^2+b_{,}^2+a_{,,}^2+b_{,,}^2+a_{,,,}^2+b_{,,,}^2 \ldots a_n^2+h_n^2] \quad \text{oder}$$

$$J = \frac{\sin\alpha}{4}[(a_{,}^2+b_{,}^2)+(a_{,,}^2+b_{,,}^2)+(a_{,,,}^2+b_{,,,}^2) \ldots (a_n^2+b_n^2)]$$

Dies lässt sich umwandeln in

$$J = \frac{\sin\alpha}{4}[(a_{,}+b_{,})^2-2a_{,}b_{,}+(a_{,,}+b_{,,})^2-2a_{,,}b_{,,}+(a_{,,,}+b_{,,,})^2-2a_{,,,}b_{,,,} \ldots + (a_n+b_n)^2-2a_nb_n]$$

Sämtliche Summen $(a_{,}+b_{,})=(a_{,,}+b_{,,}) \ldots$ etc. sind aber $= S$, mithin

$$J = \frac{S^2n \cdot \sin\alpha}{4} - \frac{\sin\alpha}{2}[a_{,}b_{,}+a_{,,}b_{,,}+a_{,,,}b_{,,,} \ldots + a_nb_n]$$

Nun ist $\sqrt{a_{,}b_{,}}$ gleich einem Rv der Blattcurve, mithin, wenn wir 2 mit dem Wkl. α aufeinander folgende Rven haben, deren Längendifferenz verschwindend ist, so ist der Inhalt zwischen beiden Rven liegenden Dreiecks

$$= a_{,}b_{,}\frac{\sin\alpha}{2}$$

und so fort. Dann aber ist der Wert des gesamten Ausdrucks:

$$\frac{\sin\alpha}{2}[a_{,}b_{,}+a_{,,}b_{,,}+a_{,,,}b_{,,,} \ldots + a_nb_n]$$

gleich dem Inhalt der Blattcurve, also

$$= \frac{\pi S^2}{32}$$

Demnach haben wir jetzt:

$$J = \frac{S^2 \,.\, n \,.\, \sin\alpha}{4} - \frac{\pi S^2}{32}$$

Da nun α ein unendlich kleiner Winkel und n eine unendlich grosse Zahl, so haben wir nach Obigem

$$n \,. \quad = 90^0$$

Für einen unendlich kleinen Winkel ist der sinus = dem Bogen, also

$$n \,.\, \sin\alpha = n \,.\, \text{arcus}\,\alpha \quad \text{und} \quad n \quad \text{arcus}\,\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Somit erhalten wir:

$$J = \frac{S^2\pi}{8} - \frac{S^2\pi}{32} = \frac{\pi S^2 \,.\, 3}{32}$$

d. h „die Begrenzungscurve hat den dreifachen Inhalt der Blattcurve" und erstere wird durch den mit $S/2$ um den Anfangspunkt geschlagenen Kreis, die Symmetrie-Achse und die Blattcurve in 6 gleiche Teile geteilt.

§ 18.

Die Bestimmung der Länge der Begrenzungscurve verdanke ich gewissermassen einem Zufall, insofern ich, bei aller aufgewandten Mühe, doch nicht vermuten konnte, dass auf dem eingeschlagenen Wege gerade diese Frage eine so überraschende Lösung finden würde. Dieser Weg war der, dass ich den allgemeinen Ausdruck aufsuchte für den zur Begrenzungscurve gehörigen Krümmungsradius. Ich schlug dabei folgendes Verfahren ein. Nämlich aus der Tangentengleichung bildete ich die der Normale und suchte dann durch Variiren der Coordinatenwerte um eine unendlich kleine Grösse, welche ich am Schluss zu null werden liess, den Schnittpunkt dieser beiden unendlich nahe liegenden Normalen zu bestimmen. Die Behandlung war durchaus dieselbe, wie die der oben gebrauchten Ungleichungen, nur haben wir in diesem Falle eine Gleichung vor uns. Die Tangentengleichung war:

$$y - y_1 = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}\,(x - x_1)$$

also Normalen-Gleichung:

$$y - y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y_1}}\,(x \;|\; x_1)$$

$$y = y_1 + \sqrt{\frac{x_1}{y_1}}\,(x - x_1)$$

Variiren wir $\sqrt[3]{x_1}$ als $\sqrt[3]{x_1} \pm z$, so ist für x_1 zu setzen

$$x_1 \pm 3z\sqrt[3]{x_1^2}$$

die entsprechende Variation für $\sqrt[3]{y_1}$ ergibt sich:

$$\sqrt[3]{x_1^2} \pm 2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{S^2}$$

also für $\sqrt[3]{y_1}$ tritt ein $\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1}}$

Nun lautet die Gleichung:

$$y = y_1 + \sqrt{\frac{x_1}{y_1}}(x - x_1) = \frac{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1)}{\sqrt[3]{y_1}}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1} \pm z((x - x_1 \mp 3z\sqrt[3]{x_1^2})}{\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2\sqrt[3]{x^1}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1)}{\sqrt[3]{y_1}} = \frac{\sqrt[3]{y_1^4} \mp 4z\sqrt[3]{x_1^2 y_1^2} + \sqrt[3]{x_1}((x - x_1) \mp zx \mp zx_1 \pm 3zx}{\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1}}}$$

$$= \frac{\overbrace{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1) \mp 4z\sqrt[3]{x_1 y^2_1} \mp 4zx_1}^{\mp 4z\sqrt[3]{x_1}(\sqrt[3]{y_1^2} + \sqrt[3]{x_1^2}} \pm zx}{\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{a_1}(x - x_1) \mp z(4\sqrt[3]{S_2 x_1} - y)}{\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1}}}$$

ich quadrire jetzt und beseitige die Nenner.

$$(\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1})\,[\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x_1 - x_1)]^2$$

$$= \sqrt[3]{y_1^2}\,[\{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1)\}^2 \mp 2z(4\sqrt[3]{S^2 x_1} - x)(\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1))]$$

$$\sqrt[3]{y_1^2}[\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-x_1)]^2 \mp 2z\sqrt[3]{x_1}\,[\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-x_1)]^2$$

$$= \sqrt[3]{y_1^2}\,[\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-x_1)]^2 \mp 2z\sqrt[3]{y_1^2}(4\sqrt[3]{S^2x_1}-x)\,(\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-y_1))$$

dividire durch $2z[\sqrt[3]{y_3^4}+\sqrt[3]{x_1(x-x_1)}]$

$$\sqrt[3]{x_1}\,[\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-x_1)] = \sqrt[3]{y_1^2}(4\sqrt[3]{S^2x_1}-x)$$

$$\sqrt[3]{x_1y_1^4}+x\sqrt[3]{x_1^2}-\sqrt[3]{x_1^5} = 4\sqrt[3]{S^2x_1y_1^2}-x\sqrt[3]{y_1^2}$$

$$x(\underbrace{\sqrt[3]{x_1^2}+\sqrt[3]{y_1^2}}_{\sqrt[3]{S^2}}) = 4\sqrt[3]{S^2x_1y_1^2}+\sqrt[3]{x_1}\,\underbrace{(\sqrt[3]{x_1^4}-\sqrt[3]{y_1^4})}_{(\sqrt[3]{x_1^2}-\sqrt[3]{y_1^2})\sqrt[3]{S^2}}$$

$$x = 4\sqrt[3]{x_1y_1^2}+\sqrt[3]{x_1}(\sqrt[3]{x_1^2}-\sqrt[3]{y_1^2}) = 4\sqrt[3]{x_1y_1^3}+y_1-\sqrt[3]{x_1y_1^2}$$
$$= 3\sqrt[3]{x_1y_1^2}+x_1$$

$$y = 3x_1+x_1 = n+2x_1, \quad x-x_1 = 3x_1 = \sqrt[3]{x_1y_1^2}$$

$$y-y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y_1}}\,.\,3\sqrt[3]{x_1y_1^2} - 3\sqrt[3]{x_1^2y_1} = 3y_1$$

Somit ist der Krümmungsradius

$$kR = \sqrt{(x-x_1(^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{9x_1^2+9y_1^2}$$
$$= kR = 3\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

d. h. also: „der Krümmungsradius ist gleich dem dreifachen *Rv* an den zugehörigen Punkt der Blattcurve", wonach die discontinuirliche Construction der Krümmungscurve sehr leicht ist. Suchen wir nun auch deren Gleichung. Ebenso:

$$y-y_1 = 3\sqrt[3]{x_1y_1^2}$$

also

$$y = y_1+3\sqrt{x_1^2y_1}$$

und ebenso

$$x = x_1+3\sqrt{x_1y_1^2}$$

$$x+y = x_1^3\sqrt{x_1^3y_1}+3\sqrt{y_1y_1^2}+y_1 = (\sqrt{y_1}+\sqrt{y_1})^3$$

demnach

$$\sqrt{y+y} = \sqrt{y_1}+\sqrt{y_1}$$

oder

$$\sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{y_1^2} + 2\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{y_1^2} = \sqrt{S^2} + 2\sqrt{y_1 y_1}$$

oder

$$2\sqrt{x_1 y_1} = \sqrt{(x+y)^4}\sqrt{S^4}$$

Ferner ist

$$y = y_1 + 3\sqrt{x_1^2 y_1} = \sqrt{y_1}\,(\sqrt{y_1^3} + 3\sqrt{x_1^2})$$

$$= \sqrt{y_1}\,(\sqrt{S^2} + 2\sqrt{x_1^2})$$

$$x = x_1 + 3\sqrt{x_1^3 y^2} = \sqrt{x_1}\,(\sqrt{y_1^2} + 3\sqrt{y_1^2})$$

$$= \sqrt{y_1}\,(\sqrt{S^2} + 2\sqrt{y_1^2})$$

also

$$y^2 = \sqrt{S_9 y_1^2} + 4\sqrt{S^2 x_1 y^2{}_1{}^2} + 4\sqrt{x^4 y_1^2}$$

$$y^2 = \sqrt{S^4 x_1^2} + 4\sqrt{S^3 x_1^2 y_1^2} + 4\sqrt{x_1^2 y_1^4}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{S^4}\,\underbrace{(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{y_1^2})}_{\sqrt{S^2}} + 8\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2}$$

$$+ 4\sqrt{y_1^2 x_1^2}\,\underbrace{(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{y_1^2})}_{\sqrt{S^2}}.$$

$$x^2 + y^2 = S^2 + 12\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2}$$

also ferner

$$12\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2} = x^2 \quad y^2 - S^2$$

nach Obigem ist aber

$$4\sqrt{x_1^2 n_1^2} = \sqrt{(x+n)^2} - \quad S^2$$

oder

$$12\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2} = 3\sqrt{S^2(\sqrt{(x+n)^2} - \sqrt{S^2})^2}$$

daraus resultirt:

$$x^2+y^2-S^2 = 3\sqrt{S^2(\sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{S^2})^2}$$

also endgültige Gleichung der Curve aller Krümmungsmittelpunkte.

Der wahre Charakter dieser Curve kommt jedoch erst an's Licht, wenn wir des Achsensystem um 45° drehen. Alsdann bleibt x^2+n^2 als Quadrat des Rv unverändert; dagegen wird aus $(x+n)$ nun: $x\sqrt{2}$ oder statt $(x+y)^2$ tritt ein $2x^2$ und die Gleichung lautet:

$$x^2+y^2-S^2 = 3\sqrt{S^2(\sqrt{2x^2} - \sqrt{S^2})^2}$$

dies aufgelöst, ergibt:

$$x^2+y^2-S^2 = 3\sqrt{4S^2x^4} - 6\sqrt{2S^4x^2} + 3S^2$$

umgeformt:

$$y^2 = 4S^2 - 3\sqrt{16S^4x^2} + 3\sqrt{4S^2x^4} - x^2 = (\sqrt{(2S^2)^2} - \sqrt{x^2})^3$$

radicirt:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{(2S^2)^2} - \sqrt{x^2} \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{(2S)^2}$$

„Wir machen also die überraschende Entdeckung, dass die Curve der Krümmungsmittelpunkte zur Begrenzungscurve wiederum eine Begrenzungscurve ist, jedoch mit doppeltem S als Tangenten-Constante."

In Figur 22. sieht man die Begrenzungscurve nebst ihrer Krümmungscurve ausgezeichnet, letztere nur für die untere Hälfte. Die Betrachtung dieser Figur führte mich sofort auf die Lösung der Frage nach der Länge der Begrenzungscurve. Dazu genügt folgende Ueberlegung: Wir fanden, dass der Krümmungsradius in einem Punkte immer gleich ist dem dreifachen Ro des entsprechenden Punktes der Blattcurve. Also

$$ia = 3io, \quad mr = 3om, \quad kb = 3vl \quad \text{u. s. w.}$$

Denkt man sich nun den ganzen Raum aiw in eine unendliche Succession gleichschenkliger Dreiecke zerlegt, deren jedes einen unendlich kleinen Wkl. α an der Spitze und einen Krümmungsradius zur

Seite hat, so wird sich die Begrenzungscurve *aw* aus lauter unendlich kleinen Abständen zwischen den Spitzen dieser Dreiecke zusammensetzen. „Jeder solche Abstand ist aber gleich der Längendifferenz zweier aufeinander folgenden Krümmungsradien".

Der oben erwähnte Wkl. α zwischen den aufeinander folgenden Krümmungsradien ist zugleich der Winkel zwischen den 2 entsprechenden Radiivectoren der Blattcurve, weil diese sowol wie die Krümmungsradien auf derselben Hypotenuse S je paarweise senkrecht stehen. Darum kann man alle Krümmungsradien ia, kb, tc, ud u. s. w. als gleichwertig betrachten mit Radiivectoren einer Blattcurve mit der Constanten $3S$, den halben Quadranten bei 45^0 durchlaufend. Die Radiivectoren der Blattcurve sind aber, wie wir wissen, hinsichtlich der Länge gleich dem sinus des doppelten Polarwinkels. Wir haben somit die successiven Längendifferenzen, aus welchen sich unsere Curve *aw* zusammensetzt, auszudrücken durch:

$$\sin 2\alpha + (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) + (\sin 6\alpha - \sin 4\alpha) + (\sin 8\alpha - \sin 4\alpha) \;.\;.\;.$$
$$+ [\sin(n-2)\alpha - \sin(n-4)\alpha] + [\sin n\alpha - \sin(n-2)\alpha]$$

Als Summe dieser Reihe bleibt offenbar übrig $\sin n \,.\, \alpha = \sin 90^0$ = dem Radius des betr. Kreises, welcher in diesem Falle 3mal so gross ist, wie der unserer ursprünglichen Blattcurve. Dieser war $S/2$, demnach haben wir als Länge der Curve *aw* den Wert $\frac{3S}{2}$ und da *aw* eine halbe Begrenzungscurve ist, so hat die ganze Begrenzungscurve mit der Constanten $2S$ die Länge $= 3S$. Da nun alle Begrenzungscurven in Grösse etc. proportional sein müssen, so haben wir als Schlussresultat: Länge der Begrenzungscurve von der Formel

$$\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{S^2}$$

ist

$$= \frac{3S}{2}$$

Anmerkung. Aus Obigem ergibt sich der KR für den Symmetriepunkt $= \frac{3S}{2}$ für die Endpunkte der Curve $= 0$. Zwischen diesen liegen 2 Punkte mit

$$KR = S$$

für diese ist also Ro des Blattcurvenpunktes $= S/3$, was nach Obigem die Berührungspunkte der 45^0 Tangente an die Blattcurve sind.

$$W + kR = 0$$

da muss auch die Curve selbst endigen, mithin hat die Begrenzungscurve jenseits der Längen S keine Fortsetzung.

§ 19.

Im folgenden letzten Paragraphen sollen noch 3 Nutzanwendungen dargelegt werden, die aus der Blattcurvengleichung gezogen werden können; wobei ich gleich betonen will, dass es solche Nutzanwendungen noch viele geben kann, die ich jetzt nicht ahne. Die erste bezieht sich auf die Parabel, deren Gleichung ich, abweichend von der neueren Schreibweise, mit

$$y^2 = 2px$$

nach altem Styl beibehalte, weil ich sie für entsprechender erachte. Sucht man zur Parabel den allgemeinen Ausdruck für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, so erhält man

$$x = p + 3x_1, \quad y = -\frac{y_1^3}{p^2}$$

und demnach

$$KR = \sqrt{(x-x_1{}^2+(y-n_1)^2}$$

$$= \sqrt{(p+2x_1)^2 + y_1^2\left(\frac{y_1^2}{p^2}+1\right)^2}$$

oder

$$\sqrt{(p+2x_1)^2 + y_1^2\left(\frac{2x_1}{p}+1\right)^2} = \frac{(2x_1+p)\sqrt{p+y_1^2}}{p}$$

Wollen wir nun in der Formel nur x_1 und y_1 haben, so müssen wir für p den Wert $\frac{y_1^2}{2x_1}$ einführen und erhalten dann

$$KR = \frac{\left(2x_1 + \frac{y_1^2}{2x_1}\right)\sqrt{\frac{y_1^4}{4x_1^2} + y_1^2}}{y_1^2/2x_1}$$

oder

$$KR = \frac{(4x_1^2 + y_1^2)\sqrt{\frac{y_1^4 + 4x_1^2 y_1^2}{2y_1}}}{y_1^2}$$

$$= \frac{(xx_1^2 + y_1^2)\sqrt{4x_1^2 + y_1^2}}{2x_1 y_1}$$

$$KR \cdot 2x_1 y_1 = \left(\sqrt{4 \quad x_1^2 \; y_1^3} \quad \right)$$

oder

$$\sqrt{2x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{KR \cdot 2x_1 y_1}$$

endlich

$$\sqrt{(2x_4)^2 + y_1^2} = \sqrt{KR \cdot 2x_1 y_1}$$

Dies ist die genaue Gleichung unserer Blattcurve, woraus sich also ergibt, dass der Krümmungsradius jedes Punktes der Parabel zu dessen Coordinaten in einer Beziehung steht, ähnlich wie die Constante S zu den Coordinaten der Blattcurve. Das Wichtigste ist nun, dass dies eine sehr einfache, directe Construction des Krümmungsradius für jeden Punkt der Parabel ermöglicht. Nämlich: man trägt x_1 2 mal nach rechts ab, errichtet y_1 senkrecht im Endpunkt dieser verdoppelten Abscisse, verbindet das obere Ende von y_1 mit dem Aufangspunkt und errichtet im Endpunkte dieses Rr wiederum eine Senkrechte. „Diese schneidet die Achsen, und deren sich ergebende Länge ist der gesuchte KR zum Punkte $x_2 y_1$ der Parabel.“

Die zweite Nutzanwendung ergibt sich bei der Curve mit der Gleichung:

$$x^2 y = T^3$$

welche man wol die Cubus-Hyperbel nennen könnte, indem die Gleichung

$$xy = S^2$$

die Hyperbel 2ten Grades bezeichnet. Die Tangentengleichung findet man wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 y_1 = S^3, \quad x_1^2 = \dfrac{S^3}{y_1} \\ x_1^2 y_{11} = S^3, \quad x_1^2 = \dfrac{S^3}{y_{11}} \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1^2 - x_1^2 = S^3 \dfrac{(y_{11} - y_1)}{y_1 y_{11}} = \dfrac{S^3}{y_1 y_{11}} (y_1 - y_{11}) \\ = \dfrac{(x_1 + x_{11}) y_1 y_{11}}{S^3} = \dfrac{y_1 - y_{11}}{x_1 - x_{11}} \end{array}$$

also Secantengleichung:

$$y - y_1 = -\frac{y_1 y_{11} (x_1 + x_{11})}{S^3} (x - x_1)$$

setzen jetzt beide Punkte als einen, Tangentengleichung:

$$y - y_1 = -\frac{2 y_1^2 x_1}{S^3} (x - x_1) = -\frac{2 x_1 y_1^2}{x_1^2 y_1} (x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{2 y_1}{x_1} (x - x_1) \quad \text{Gleichg. der Normale} \quad y - y_1 = \frac{x_1}{2 y_1} (x - x_1)$$

$$y = y_1 + \frac{x_1}{2 y_1} (x - x_1)$$

variiren nun x_1 als $x_1 \pm z$, $y_1 = \dfrac{S^3}{y_1^2}$ variirt $\dfrac{S^2}{x_1^2 \pm 2 z x_1}$

$$y_1 + \frac{x_1 x}{2 y_1} - \frac{x_1^2}{2 y_1} = \frac{S^3}{x_1^2} + \frac{x_1^3 x}{2 S^3} - \frac{x_1^4}{2 S^4} = \frac{S^3}{x_1^2 \pm 2 z x_1} + \frac{x_1 x_1^3 \pm 3 z x_1^2)}{2 S^3} - \frac{x_1^4 \pm 4 z x_1^3}{2 S^3}$$

$$2 S^6 (x_1^2 \pm 2 z x_1) + x x_1^5 (x_1^2 \pm 2 z x_1) - x^6 (x_1^2 \pm 2 z x_1)$$
$$= 2 S^6 x_1^2 + x x_1^2 (x_1^2 \pm 2 z x_1)(x_1^3 \pm 3 z x_1^2) = (x_1^4 \pm 4 z x_1^3)(x_1^2 \pm 2 z x_1) x_1^2$$

$$2 S^6 x_1^2 \pm 4 S^6 z x_1 + x x_1^7 \pm 2 z x x_1^6 - x_1^8 \mp 2 z x_1^7$$
$$= 2 S^6 x_1^2 \times x x_{12} \pm 2 z x x_1^6 \pm 3 z x x_1^6 - x_1^8 \mp 4 z x_1^7 \mp 2 z x_1^7$$

dividire durch $z x_1$

$$4 S^6 = 3 x x_1^8 - 4 x_1^6$$
$$8 x x_1^5 = 4 (S^6 + x_1^6)$$
$$x = \frac{4 (S^6 + x_1^6)}{3 x_1^5}$$

setze

$$S^6 = x_1^2 y_1^2, \quad x = \frac{4 x_1^4 (y_1^2 + x_1^2)}{3 x_1^5}$$

$$x = \frac{4 (x_1^2 + y_1^2)}{3 x_1}, \quad x - x_1 = \frac{4 x_1^2 + 4 y_1^2 - 3 x_1^2}{3 x_1} = \frac{4 y_1^2 + x_1^2}{3 x_1}$$

$$y-y_1 = \frac{x_1}{2y_1} \cdot \frac{4y_1^2+x_1^2}{3x_1} = \frac{4y_1^2+x_1^2}{6y_1}$$

und Krümmungsradius also

$$KR = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \frac{(4y_1^2+x_1^2)}{3}\sqrt{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{4y_1^2}}$$

$$= \frac{(4y_1^2+x_1^2)\sqrt{4y_1^2+x_1^2}}{3 \cdot 2x_1y_1}$$

$$KR = \frac{(\sqrt{4y_1^2+y_1^2})^3}{6y_1x_1}$$

Diesem Ausdruck kann man folgende Form geben:

$$3KR \cdot 2y_1y_1 = \left(\sqrt{4y_1^2+x_1^2}\right)^3$$

oder

$$\sqrt{(2y_1)^2+x_1^2} = \sqrt{3KR \cdot 2y_1x_1}$$

Hier haben wir also wiederum eine Blattcurvengleichung, in welcher nur y_1 verdoppelt ist und in der 3fachen KR die Stelle von S einnimmt; daraus ergibt sich, ähnlich wie bei der Parabel, eine einfache Construction des KR für jeden Punkt der Curve. Man errichtet senkrecht im Endpunkt der Abscisse y_1 die doppelte Ordinate y_1; zieht den Ro an den erhaltenen Punkt und errichtet im Endpunkt wiederum senkrecht auf dem Ro die Hypotenuse, welche die Achsen schneidet. „Ihre Länge ist dann gleich dem 3 fachen Krümmungsradius des Punktes x_1y_1". (Siehe die Figur.)

Für eine Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten ist der Krümmungsradius

$$KR = \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2})^3}{a^2}$$

und da für diesen Fall

$$a^2 = 2x_1y_1$$

so haben wir

$$2KR \cdot x_1y_1 = \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)^3$$

oder

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{2KR \cdot x_1y_1}$$

was ebenfalls eine Blattcurvengleichung ist. Hier ergibt also die Senkrechte auf den Radiusvector in dem betr. Punkte der Hyperbel

sofort eine Hypotenuse gleich dem doppelten Krümmungsradius. Jedoch sind diesfalls die Asymptoten als Achsen anzusehen und hierauf die Coordinaten zu beziehen. (Siehe die Figur).

Eine ganze Anzahl von Werten, die sich bei Untersuchung dieser und anderer Curven ergeben und 3 te Wurzeln von einfachen Zahlen enthalten, würden sich mit den gewöhnlichen Mitteln der Planimetrie nicht construiren lassen. Dagegen nach dem in § 8 demonstrirten Verfahren ist dies möglich.

Die Untersuchung weiterer Curven von der Formel

$$x^2 + y^2 = S^2$$

wird später folgen. In Vorstehendem sollte nur der Beweis geliefert werden, dass es möglich ist, Curven 3ten Grades auf einfach analytischem Wege erschöpfend zu behandeln und so unsren höheren Schulen zugänglich zu machen, die sich bisher über die Kegelschnitte nicht hinauswagen durften.

Anmerkung. Es sei hier gleich der Satz mitgeteilt, den bei näherer Untersuchung Jeder leicht bestätigt finden wird: „dass für alle Curven in der Ebene, deren Gleichung nur eine Constante enthält, der allgemeine Ausdruck für den Krümmungsradius die Form der Blattcurvengleichung annimmt, gleichviel welchen Grades die Curve sei.“ Also lautet dieser:

$$\sqrt{e \cdot KR \cdot z \cdot y_1 \cdot v \cdot x_1} = \sqrt{(z \cdot y_1)^2 + (v \cdot x_1)^2}$$

worin e der Exponent der Constante, z derjenige von z_1 und v der von y_1 in der Gleichung der Curve ist. Die Coefficienten von zwei Gliedern geben also zusammen jedesmal den Coefficienten des dritten, wie in der Gleichung die Exponenten von zwei Gliedern zusammen den des dritten.

VIII.

Miscellen.

1.

Die Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen.

Bezeichnet man die Einer einer Zahl z mit z_1 und die Zahl in den Stellen vor den Einern mit z_2, so hat man $z = 10z_2 + z_1$. Da der Rest r, den z bei der Division durch m giebt, der Zahl congruent ist, so ist:

$$r \equiv 10z_2 + z_1 \; [\text{mod } m]$$

Setzt man in diese Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod m], so ist auch

$$r \equiv 10z_2 + 10\alpha z_1 \; [\text{mod } m] \quad \text{und}$$
$$r \equiv 10(z_2 + \alpha z_1 \; [\text{mod } m]$$

Wegen der Congruenz $1 = 10\alpha$ [mod m] ist m relative Primzahl zu 10. Der Rest $10(z_2 + \alpha z_1)$ kann also nur null werden, wenn $z_2 + \alpha z_1 \equiv 0$ [mod m] ist.

Die beiden Congruenzen $1 \equiv 10\alpha$ [mod m] und

$$z_2 + \alpha z_1 \equiv 0 \; [\text{mod } m]$$

sprechen also zusammen die Bedingung aus, unter welcher z durch m teilbar ist.

Die relativen Primzahlen zu 10 haben in den Einern eine der vier Zahlen 1, 3, 7, 9. Wenn man daher unter m_1 die Zahl der Stellen vor den Einern der Zahl m versteht, so lässt sich m darstellen durch eine der vier Formen

$$1) \quad m = 10m_1 + 1$$
$$2) \quad m = 10m_1 + 3$$
$$3) \quad m = 10m_1 + 7$$
$$4) \quad m = 10m_1 + 9$$

Der Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod $10m_1+1$] genügt $\alpha = -m_1$,
denn $10(-m_1) = -(10m_1+1)+1$

Der Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod $10m_1+3$] genügt $\alpha = 3m_1+1$,
denn $(10(3m_1+1) = 3(10m_1+3)+1$

Der Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod $10m_1+7$] genügt $\alpha = -(3m_1+2$,
denn $10(-3m_1-1) = -3(10m_1+7)+1$

Der Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod $10m_1+9$] genügt $\alpha = m_1+1$,
denn $10(m_1+1) = (10m_2+1)+1$

Wenn $m_1 = 0$ gesetzt wird aus $1 \equiv 10\alpha$ [mod $+1$] für $\alpha = 0$
$1 \equiv 10\alpha$ [mod $+3$] für $\alpha = 1$
$1 \equiv 10\alpha$ [mod $+7$] für $\alpha = -2$
$1 \equiv 10\alpha$ [mod $+9$] für $\alpha = 1$

Aus der Congruenz $z_2 + \alpha z \equiv 0$ [mod m] erhält man

1) $z_2 + 0 \,.\, z_1 \equiv 0$ [mod 1]
2) $z_2 + 1 \,.\, z_1 \equiv 0$ [mod 3]
3) $z_2 - 2 \,.\, z_1 \equiv 0$ [mod 7]
4) $z_2 + 1 \,.\, z_1 \equiv 0$ [mod 9]

Die Congruenz 1) spricht aus, dass jede Zahl durch 1 teilbar ist.

Die Congruenz 2) spricht aus, dass eine Zahl durch 3 teilbar ist, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen von den Einern die Einer addirt.

$$72531 \equiv 7254 - 729 \equiv 81 \equiv 9 \text{ [mod 3]}$$

Die Congruenz 3) spricht aus, dass eine Zahl durch 7 teilbar ist, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Zweifache der Einer subtrahirt

$$5313 \equiv 525 \equiv 42 \equiv 0 \text{ [mod 7]}$$

Die Congruenz 4) spricht aus, dass eine Zahl durch 9 teilbar ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen von den Einern die Einer addirt

$$4788 \equiv 486 \equiv 9 \text{ [mod 9]}$$

Setzt man $n_1 - 1$, so ist 1) $1 \equiv 10\alpha$ [mod 11] und $\alpha = -1$
2) $1 \equiv 10\alpha$ [mod 13] und $\alpha = 4$
3) $1 \equiv 10\alpha$ [mod 17] und $\alpha = -5$
4) $1 \equiv 10\alpha$ [mod 19] und $\alpha = 2$

Die Congruenz $z_2 + \alpha z_1 \equiv 0$ [mod 11] giebt also

$$1)\quad z_2 - z_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 11]$$
$$2)\quad z_2 + 4z_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 13]$$
$$3)\quad z_2 - 5s_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 17]$$
$$4)\quad z_3 + 2^0{}_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 19]$$

Nach 1) ist also eine Zahl durch 11 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern die Einer subtrahirt.

$$58443 \equiv 5841 \equiv 583 \equiv 55 \equiv 0 \ [\text{mod } 11]$$

Nach 2) ist eine Zahl durch 13 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl vor den Einern das Vierfache der Einer addirt.

$$8125 \equiv 832 \equiv 91 \equiv 13 \equiv 0 \ [\text{mod } 13]$$

Nach 3) ist eine Zahl durch 17 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Fünffache der Einer subtrahirt.

$$6341 \equiv 629 \equiv 37 \equiv 0 \ [\text{mod } 17]$$

Nach 4) ist eine Zahl durch 19 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen vor den Einern das Zweifache der Einer addirt.

$$14022 \equiv 1406 \equiv 152 \equiv 19 \equiv 0 \ [\text{mod } 19]$$

Wenn m_1 gleich 2 gesetzt wird, findet man

$$1)\quad 1 \equiv 10\alpha \ [\text{mod } 21] \quad \text{und} \quad \alpha = -2$$
$$2)\quad 1 \equiv 10\alpha \ [\text{mod } 23] \quad \text{und} \quad \alpha = +7$$
$$3)\quad 1 \equiv 10\alpha \ [\text{mod } 27] \quad \text{und} \quad \alpha = -8$$
$$4)\quad 1 \equiv 10\alpha \ [\text{mod } 29] \quad \text{und} \quad \alpha = +5$$

Die Congruenz $z_2 + z\alpha \equiv 0$ [mod m] giebt also

$$1)\quad z_2 - 2z_1 = 0 \ [\text{mod } 21]$$
$$2)\quad c^2 + 7z_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 23]$$
$$3)\quad z_2 - 8z_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 27]$$
$$4)\quad z_2 + 3z_1 = 0 \ [\text{mod } 29]$$

Nach 1) ist also eine Zahl durch 21 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Zweifache der Einer subtrahirt.

$$13734 \equiv 1365 \equiv 126 \equiv 0 \ [\text{mod } 21]$$

Nach 2) ist eine Zahl durch 23 teibar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen vor den Einern das Siebenfache der Einer addirt.

$$14651 \equiv 1472 \equiv 161 \equiv 23 \equiv 0 \ [\text{mod } 23]$$

Nach 3) ist eine Zahl durch 27 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Achtfache der Einer subtrahirt.

$$9369 \equiv 861 \equiv 54 \equiv 27 \equiv 0 \ [\text{mod } 27]$$

Nach 4) ist eine Zahl durch 29 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen vor den Einern das Dreifache der Einer addirt.

$$12064 \equiv 1218 \equiv 145 \equiv 29 \equiv 0 \ [\text{mod } 29]$$

In derselben Weise kann man für jeden Modulus m, welcher zu 10 relative Primzahl ist, das entsprechende α und damit das Kennzeichen für die Teilbarkeit jeder Zahl z durch den Modulus m finden.

Direktor Dr. Theodor Lange.

2.

Facultätencongruenzen.

Für eine Reihe von auf einanderfolgenden Facultäten und für einen beliebigen Modul m bestehen die folgenden Congruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} 2! + (m-2)1! \\ 3! + (m-3)2! \\ 4! + (m-4)3! \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ (m-1)! + (m-[m-1](m-2)! \end{array}\right\} \equiv 0 \pmod{m}$$

Beispiel:

$m = 11.$

$$
\begin{aligned}
2! + 9 \,.\, 1! &= 11 \\
3! + 8 \,.\, 2! &= 22 \\
4! + 7 \,.\, 3! &= 66 \\
5! + 6 \,.\, 4! &= 264 \\
6! + 5 \,.\, 5! &= 1320 \\
7! + 4 \,.\, 6! &= 6920 \\
8! + 3 \,.\, 7! &= 55440 \\
9! + 2 \,.\, 8! &= 443520 \\
14! + 1 \,.\, 9! &= 3991680
\end{aligned}
$$

Die entstandenen Producte sind alle durch 11 teilbar.

Oldenburg i. G. G. Speckmann.

Litterarischer Bericht
LXII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

The works of Archimeds. Edited in modern notation with introductory chapters by T. L. Heath, Sc. D. some time Fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897. University press. London. C. J. Clay. Leipzig, F. A. Brockhaus. 186 + 325 S.

Dies Buch enthält einleitend in vielseitigst umfassender kritischer Behandlung über Archimedes, sein Leben, seine Geistesrichtung und seine Werke, alles, was sich aus vorhandenen Daten ermitteln lässt, dann die englische Uebersetzung seiner erhaltenen Schriften. In gleicher Weise hat der Verfasser die Werke von Apollonius behandelt und bereits herausgegeben. Dem Urteil von Chasles folgend findet er in beiden den in der Neuzeit bedeutungsvollen, hier schon im Altertum hervortretenden Gegensatz, dass Apollonius seine Forschung auf die Geometrie der Form und Lage, Archimedes auf die Geometrie des Masses richtet. Die Einleitung gibt zuerst Notizen aus dem Leben — geboren 287 gestorben 213 v. Chr. in Syrakus, Sohn des Astronomen Pheidias. Eine beträchtliche Zeit verlebte er in Alexandria. Ausser Geometrie und Arithmetik trieb Archimedes auch Mechanik, aber nicht sowol in wissenschaftlichem Streben, sondern zu vorliegenden technischen Zwecken. — Ferner berichtet die Einleitung über Manuscripte, Hauptausgaben, verlorene Werke u. a. ferner über die Beziehungen des Archimedes zu seinen Vor-

gängern. Dann wird das Wesen seiner Arithmetik dargelegt, dann die Probleme besprochen, welche Apollonius und Archimedes mit *νεύσεις* bezeichnen. Das Folgende betrifft die kubischen Gleichungen, Anticipationen der Integralrechnung und die Terminologie. — Die übersetzten Werke des Archimedes sind folgende: Ueber Kugel und Cylinder, 2 Bücher. Ueber Konoide und Sphäroide. Ueber Spiralen. Ueber das Gleichgewicht von Ebenen, 2 Bücher. Der Sandrechner, Quadratur der Parabel. Ueber schwimmende Körper, 2 Bücher, Buch der Lemmata. Das Rinderproblem. Jedes dieser 13 Bücher besteht aus einer Anzahl Sätze und Aufgaben. H.

Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzensdorf. Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen. Von Dr. phil. J. H. Graf, ordentl. Professor der Mathematik an der Hochschule in Bern. Mit dem Portrait und dem Facsimile eines Briefes Steiners. Bern 1897. K. J. Wyss. 54 S.

Jakob Steiner, jüngster Sohn des Landwirts und Viehzüchters Niklaus Steiner und Anna Barbara geb. Weber in Utzensdorf (im Tale der Emme, Kanton Bern) ist geboren am 18. März 1796, gestorben 1863. Er verliess 1814 trotz des heftigen Widerstandes seiner Eltern aus Lernbegierde seine Heimat und gieng nach der Anstalt Pestalozzi's in Yverdon, der ihn aufnahm, und wo er 1½ Jahr als Schüler, dann noch einige Zeit als Lehrer gewesen ist. Von 1818 an setzte er seine Studien in Heidelberg fort, wo er bei Prof. Schweins höhere Analysis hörte, sich aber später mit demselben überwarf und dessen Methode verspottete. Von 1821 bis 1822 war er Lehrer am Werderschen Gymnasium in Berlin, gab jedoch die Stelle wegen des ihm verhassten, von seinem Director eingeführten Lehrbuchs auf. Als Privatlehrer in Berlin gewann er dann hohe Anerkennung beim Prinzen August, Wilhelm von Humboldt und den hervorragendsten Familien, deren Söhne er unterrichtete. 1834 ward er zum ausserordentlichen Professor an der Universität und zum Mitglied der Akademie ernannt. Aus dieser Zeit stammt der grösste und wichtigste Teil seiner litterarischen Productivität. Hervorzuheben ist sein Umgang mit Jacobi, mit dem er in gegenseitig beeinflussender Beziehung stand. Sein späteres Leben verbrachte er zum grossen Teil in der Schweiz, wo er mit Schläfli dauernd wissenschaftlich verkehrte, aber schliesslich sich doch definitiv von ihm trennte. Die vorliegende Lebensbeschreibung ist voll von charakteristischen Zügen. An allen erkennt man eine ganz eigentümliche Geistesrichtung. Er betrachtet seine Sätze nicht als errungen, nicht als hergeleitet nach alten oder neueren Methoden, sondern als

selbstverständlich sich darbietend vermöge einer alles umfassenden und beherrschenden Raumanschauung. Deren immer weiteres Vor- und Eindringen macht den ganzen Fortschritt seiner Erkenntniss aus. So hat er nicht anfangs, sondern erst später die räumlichen Gestalten in sein Gebiet gezogen. Es werden jedoch auch Fälle erwähnt, wo Steiner nach vergeblichem Suchen die Hülfe anerkennen musste, die ihm in analytischer Deduction dargeboten ward, was ihn solange ganz entmutigte, bis es ihm gelang, wenigstens nachträglich seine Anschauung dahin zu ergänzen, dass sie das Vermisste enthielt. H.

Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Oesterreich. Vom Professor Ferdinand Jos. Obenrauch. Brünn 1897. Carl Winiker. 442 S.

Berücksichtigt ist bereits die Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie in Chr. Wiener's Lehrbuch der darstellenden Geometrie 1884, wenn auch nur in gedrängter Kürze, ferner den Werken von Wilhelm Fiedler, H. Mannheim und A. G. V. Peschka. Es ist unstreitig ein höchst verdienstliches Werk, welches hier die Geschichte der beiden nahe verwandten Zweige der Geometrie für sich in voller Ausführlichkeit und nach allen Gesichtspunkten giebt. Das Buch besteht aus 2 Teilen. Der erste handelt ausschliesslich vom Leben und Wirken Monge's. Alle Angaben über Anbahnung der darstellenden Geometrie von den ältesten Zeiten an werden nur im Laufe der Einleitung gemacht. Gaspard Monge, geboren am 10. Mai 1746 im burgundischen Städtchen Beaume im Departement Côte d'or, erfand die descriptive Geometrie, durfte aber, weil das Geniecorps sie als Staatsgeheimniss betrachtete, 30 Jahre lang nichts darüber veröffentlichen. Erst 1794 ward nach Errichtung der École normale ihm gestattet darüber öffentliche Vorträge zu halten. — Es folgt dann die Gründung der École polytechnique, der weitere Ausbau der darstellenden Geometrie, in der neuern Geometrie, Monge's Infinitesimalgeometrie und sein späteres Leben. — Der 2. Teil geht sehr weit auf die Vorgeschichte der projectiven Geometrie ein. Dann folgt die neue Geometrie in den Werken von Carnot, Brianchon, Poncelet, Gergonne, Möbius, Plücker, Steiner, von Staudt, Hesse, Kummer, Schröter, Reye, Sturm, Wiener, Chasles, Brasseur, de la Gournerie, Mannheim, Cayley, Cremona, Veronese, Segre und Zeuthen. H.

Methode und Principien.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik. Von Dr. Ludwig Goldschmidt, mathematischem Revisor der Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha. Hamburg und Leipzig 1897. Leopold Voss. 279 S.

Der Titel des Buchs lässt erwarten, dass es sich zur ersten und Hauptaufgabe machen würde, die unter der Praxis und vielteiligen Anwendung aufgenommenen, dunkel gebliebenen Elemente der Theorie einmal sorgfältig auf feste Begriffe zu reduciren. Das gegenteilige Streben findet man hier durchweg betätigt. Mit wol hundertmal so vielen Worten, als hingereicht hätten, die Sache klar zu stellen, beständig abschweifend und ohne sichtliche Beziehung zum Gegenstande, wird auf den Eindruck hingearbeitet, dass es sich um eine schwierige, streitige, der Logik fremde Sache handele. Alle exacte Aussage wird mit Fleiss gemieden, alles, wonach man des Verständnisses wegen fragen muss, verschwiegen. Das Inhaltsverzeichniss lautet: Einleitung. Die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die gleich wahrscheinlichen Fälle. Das Gesetz der grossen Zahlen; die logische Theorie und dieses Gesetz. Die Bayessche Regel. Der Bernoulli'sche Satz und diese Regel. Schlussbetrachtungen. Im Vorwort nennt der Verfasser einige Autoren in Beziehung zur Wahrscheinlichkeitstheorie: Kant, Kries Lotze, v. Kries, und erklärt sich für oder wider deren Ansichten, ohne von letzeren ein Wort zu sagen, ebenso gibt er an, dass Jakob Bernoulli das Gesetz der grossen Zahlen bewiesen habe; aber in dem 63 Seiten langen Artikel sucht man vergeblich nach einer Aufstellung dieses Gesetzes; ob irgendwo ein vermeintlicher Beweis steht, entdeckt vielleicht noch jemand. Die ganze Abfassung charakterisirt sich durch eine heutzutage ungewöhnliche Ueberschätzung der formalen Logik. Zwar erkennt der Verfasser an, dass sie unzureichend sei; doch meint er nur das Reich der Gefühle mit dem, was sie nicht beherrsche. Es ist aber überhaupt die neue Wissenschaft und Forschung, in der sie bereits bedeutungslos geworden ist. In so fern ist es wol begreiflich, dass die Versation im engen Gebiete formaler Logik gegen sachliche Erfordernisse blind macht, dass also, was oben als Tendenz ausgelegt ward, sich vielleicht durch zu grosse Bevorzugung formaler Logik erklären mag.

Hoppe.

Der verjüngte Magister Matheseos. Ein Beitrag zur Sphärik und absoluten Geometrie. Von Dr. K. Traub, Prof. a. D. Lahr 1896. Moritz Schauenburg. 12 S.

Der Verfasser findet, dass der pythagoräische Lehrsatz in einigen Formen ausgesprochen sich gleichlautend auf sphärische und absolute Geometrie übertragen lässt, und hofft durch gegenwärtige Mitteilung Manchen für das Studium der absoluten Geometrie zu gewinnen.

H.

Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Von Dr. Leo Koenigsberger, Professor der Mathematik an der Universität zu Heidelberg. Mit einem Bildniss Hermann von Helmholtz's. Leipzig 1896. B. G. Teubner. 58 S.

Die in vorliegender Rede enthaltenen Untersuchungen gelten nicht allein den bewährten und daher, woran niemand zweifelt, ewig dauernden Grundlagen jener Wissenschaften, sondern zu noch grösserem Teile den problematischen Grundlagen einiger Zweige derselben, von deren definitiver Feststellung wir gegenwärtig noch weit entfernt sind. In Betreff der erstern ist zu betonen, dass das gesamte Zuwerkegehen vollkommene Freiheit bekundet von den Kant'schen Vorurteilen des absoluten Apriori, des Transscendentalen und der Metaphysik. Die gänzliche Lossagung würde noch entschiedener an den Tag treten, wenn Helmholtz nicht, statt einer nutzlosen Bekämpfung, es klugerweise stets vorgezogen hätte, in respectvoller Ferne an solchen Lehren vorüberzugehen. Wäre die Herrschaft und Präoccupation Kant'scher Irrlehren nicht selbst jetzt noch so gross und verbreitet, so würde man die Forschungswege von Helmholtz nicht sowol für originell, sondern vielmehr für natürlich halten und nicht auf Priorität Gewicht legen wollen in Ideen, mit denen man längst vertraut war, wenn man sie auch nicht mit gleichem Erfolge verkündigt hatte. Dies hat erweiternde Anwendung auf ein Urteil von Koenigsberger. Ihm zufolge untersuchte Helmholtz nicht mathematische Probleme um ihrer selbst willen mit Anwendung auf die Naturwissenschaften; er holte sie sich vielmehr aus der Beobachtung der Natur zu dem Zwecke, die Probleme der Natur mathematisch zu formuliren. Im Gegenwärtigen aber handelt es sich nicht um mathematische Probleme, sondern um philosophische Fragen der psychischen Genesis des Erkennens. In diesen heisst es, nahm er ein unmittelbares Interesse. Auch hier ist es die Freiheit von Vorurteilen, was von Vielen der Originalität der Entdeckung zugerechnet wird. Zunächst ist es nicht neu, sondern in der Forderung Bako's alle Begriffe zu ihrer scientiven Gültigkeit durch Erfahrung zu begründen enthalten, dass man den Ursprung der Grundbegriffe der Mathematik und Mechanik, in Betreff des Raumes, der Zeit und der

Masse in der Erfahrung gesucht hat. Unterbrochen und beiseite geschoben durch Kant's unwissenschaftliche, aber populäre Lehre vom Apriori ward dann die Untersuchung wieder aufgenommen von Riemann, welcher die unterschiedlichen empirischen Elemente des Raumbegriffs ermittelte. Für ihn war das Problem ein mathematisch logisches. Für Helmholtz war die Aufgabe vorbehalten den exacten Nachweis der Erfahrung durch präcise Experimente zu geben. Der Anfang und das unmittelbare Interesse seiner Tätigkeit war daher auf Beobachtung der Sinnesorgane und ihrer Functionen gerichtet. Diese physiologische Untersuchung eröffnete ihm die Bahn zur Lösung der psychologischen Aufgabe, die Construction des dreifach orthogonalen, homogenen, unendlichen, translocabeln und drehbaren Raumsystems und des Congruenzbegriffs von Seiten des erkennenden Geistes zum Bewusstsein zu führen und die Axiome der Geometrie in Betreff der Geraden, der Ebene, der Parallelen empirisch zu begründen, d. h. auf rein gegebene Tatsachen zurückzuführen. Die Lösung mag unvollendet, zum Teil bestreitbar sein, immer ist doch Helmholtz der erste, der sie ernstlich, mit Bewusstsein der Erfordernisse in Angriff genommen hat. So gilt denn Koenigsberger's charakteristische Bemerkung nicht allein von mathematischen Problemen, sondern auch von einer philosophischen Frage von didaktisch pädagogischer Bedeutung für den mathematischen Schulunterricht. — In der Mechanik handelt es sich um das Princip der summarisch. unveränderlichen lebendigen Kraft, anticipirt von Cartesius in voller Allgemeinheit für die gesamten Naturvorgänge, wiewol bei problematisch bleibendem Wesen, begrifflich exact aufgestellt von Leibniz, nach Ergänzung durch das Potential als Magazin der lebendigen Kraft für Bewegung fester Körper (und deren Atome) durch bewiesenen Lehrsatz bestimmt von Huygens, ausgedehnt auf die Wärme von Robert Mayer. Die Existenz dieses in allen Naturvorgängen herrschenden Gesetzes ist also kein Gedanke der Neuzeit. Uebrig blieb und bleibt die Entdeckung und der Nachweis des unveränderlichen Elements in der Hydrodynamik, der Aerodynamik, der Elektricität, des Magnetismus und dem Lichte. Was Helmholtz für diese Aufgabe geleistet hat, wird im übrigen Teile der Rede dargelegt. H.

Die Zahl und das Unendlichkleine. Von Dr. Karl Goebel-Soest. Leipzig 1896. Gustav Fock. 47 S.

Der Titel nennt den Gegenstand, über den der Verfasser sich äussern will; was er zu geben gedenkt, sagt der Titel nicht. Die

Anfangsworte der Schrift scheinen die Absicht zu verraten ihn nicht erklären, sondern in mystisches Dunkel hüllen zu wollen. Doch fern von aller täuschenden Kunst setzt sie auseinander, was keinem Rechner unbekannt ist, ohne je die Punkte zu berühren, welche zu principiellen Untersuchungen Anlass geben. Die ganze hinzugefügte Logik besteht im Gegensatz des Allgemeinen und Besondern. Das Motiv der Schrift ist also aus ihr so wenig wie aus dem Titel zu ersehen. Zu erwähnen sind einige historische Angaben betreffend Galilei, Fermat und Newton. Hoppe.

Kritik der exacten Forschung. Von Friedrich Ego. Gedruckt auf Kosten des Verfassers. Leiden 1897. E. J. Hrill. 81 S.

Kritik ist im ganzen Buche nicht zu finden; die eigentümlichen Meinungen des Verfassers werden stets imperatorisch ausgesprochen und nirgends ein Versuch gemacht sie dem Leser überzeugend darzutun. Auch wird dies Verhalten gar nicht verhehlt; denn gleich im Anfang erklärt der Verfasser das Gemüt für den Grund aller Erkenntniss und Richter über dieselbe und äussert sich geringschätzig über die Objectivität des Urteils. Für richtig gilt ihm, was dem Ego zusagt, der stets im Namen aller urteilt. Da nun die Schrift nur beliebige Stücke aus Doctrinen bespricht, die für sich weder instructiv noch anziehend sind, so dürfen wir sie wol für ganz unschädlich halten, nur berechnet auf das Gemüt des Ego als einzigen Lesers. Hoppe.

Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann. |Par G. Burali Forti, Professeur à l'Académie militaire de Turin. Paris 1897. Gauthier-Villars et fils. 165 S.

„Das Buch enthält eine kurze Darlegung des geometrischen Calculs nebst mehreren Anwendungen auf die elementare differentielle Geometrie. Der geometrische Calcul ist 1679 erfunden von Leibniz, dem ersten, der es für bequem oder notwendig hielt, direct auf die geometrischen Elemente zu operiren, während die analytische Geometrie auf Zahlen operirt, die eine indirecte Beziehung zu den repräsentirten Elementen haben." Die Gegenstände sind: die geometrischen Formen, nämlich Definitionen und Regeln des Calculs, Vectoren und ihre Producte, Reduction der Formen, regressive Producte, Coordinaten; variable Formen, nämlich Derivirte, Linien und Enveloppen, Regelflächen, Fresnel'schen Formeln; Anwendungen, nämlich Helix, Regelflächen bezüglich auf eine Curve, orthogonale Trajectorien. H.

An essay on the foundations of geometry. By Bertrand A. W. Russell. M. A. Fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897. University press. 201 S.

Die Abschnitte des Buchs sind folgende. Einleitung, unser Problem definirt durch seine Beziehungen zur Logik, Psychologie und Mathematik. Geschichte der Metageometrie. Kritischer Bericht über einige der Geometrie vorausgehende philosophische Theorien. Die Axiome der projectiven Geometrie, die der metrischen Geometrie, die der Freibeweglichkeit, das Axiom der Dimensionen, das der Entfernung. Philosophische Consequenzen Der Verfasser ist Anhänger von Kant, dem gegenüber er wenig eigenes Urteil darbietet. Er lässt es oft bei kurzer Formulirung bewenden, wo eingehende Erörterung erwartet werden durfte. H.

Die Grundlage der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen. Herausgegeben von A. Pringsheim. Leipzig 1896. Duncker u. Humblot. 60 S.

Daniel Bernoulli, Sohn des Professors der Mathematik Johann Bernoulli, geboren 1700 in Gröningen, ward 1725 Professor in Petersburg, 1733 Professor in Basel, zunächst für Anatomie und Botanik, später auch für Physik, und starb 1782. Die von ihm verfasste, 1738 von der Petersburger Akademie herausgegebene Abhandlung, von welcher hier die Rede ist, hat den Titel: Specimen theoriae novae de mensura sortis, auctore Daniele Bernoulli Von ihr wird im Vorliegenden eine deutsche Uebersetzung gegeben Voraus geht eine Einleitung, unterschrieben: Ludwig Fick. Hauptsächlich in letzterer tritt besonders deutlich und auffällig der verhängnissvolle Fehler der Forschung hervor, dass man nach Lösung von Fragen sucht ehe man die Fragen verstanden hat. Seit Jahrhunderten ist die richtige Wertschätzung in Frage, und bis heute hält man es für zu umständlich, und Fick denkt gar nicht daran, die Bedeutungen des Wortes aus den verschiedenartigen Bedürfnissen seiner Anwendung herzuleiten. Er betrachtet noch immer das Wort als Vertreter eines, wenn auch besserungsbedürftigen Begriffs und die Zuziehung zu berücksichtigender Umstände als Fortschritt und Berichtigung. In der Tat besitzen wir auf gegenwärtigem Standpunkt erst eine Vielheit von Begriffen des Wertes gültig für die respectiven in's Auge gefassten Fälle, deren manche sich vielleicht nachweisbar vereinigen lassen. Fick sieht in Bernoulli's Schrift einen epochemachenden

Fortschritt der Theorie des Wertes über die bisherige, welche auf objectiver Grundlage ruht. Bernoulli selbst legt nur Gewicht darauf, dass seine Theorie neu ist. Neu ist sie durch die Annahme, dass Jeder seinen Gewinn und Verlust nach dessen Quotienten durch sein Vermögen schätzt (nach gleichem Princip, wie später Fechner die Grenze der Empfindbarkeit von Sinnesreizen als den Quotienten des Unterschiedes durch den gesamten Reiz mit Experimenten nachwies). Aber ein Fortschritt der Theorie ist aus der Zuziehung eines subjectiven Elements nicht ersichtlich: es sind eben nur andre Fälle in Betracht gezogen, auf welche der neue Begriff des Wertes passt (sei es dass man fragt, ob oder bei wieviel Einsatz man auf ein gebotenes Spiel eingehen will, oder dass man mit der Spielregel Gimpel zu fangen gedenkt u. s. w.) Auf die Fehler, welchen dadurch Raum gegeben wird, dass man Bernoulli's Hypothese allgemein, mithin auch an unpassender Stelle, wo die Frage mit subjectiver Schätzung nichts zu tun hat, anwendet, wollen wir nicht eingehen, sondern nur einen von Bernoulli selbst begangenen Fehler erwähnen, der an einem Beispiel das Ungenügende der alten Theorie zeigen will. Er lässt wiederholt ein Geldstück werfen, so dass 2 Fälle gleich möglich sind; nach jedem Wurfe soll sich der Preis für den glücklichen Wurf von a an verdoppeln; mit letzterem endet das Spiel. Er behauptet, nach alter Theorie wäre der Wert der Hoffnung offenbar unendlich. Nach einfacher Wahrscheinlichkeitsrechnung ist derselbe

$$= (2^{n-1} \,.\, 2^n) = \tfrac{1}{2}a$$

und $\frac{1}{2}a$ anfangs einzusetzen. Um den Irrtum zu erklären, könnte man annehmen, Bernoulli habe im Sinne gehabt (wovon er nichts sagt, wie er überhaupt von veränderlichen Werten nie spricht) der Spieler habe nach dem $m$ten unglucklichen Wurfe seinen Anspruch an einen andern verkauft (auch die Zulässigkeit der Uebertragung durfte nicht verschwiegen werden) Das Spiel wäre dann, vorher um die Einheit a, von da an in ein ein gleiches um die höhere Einheit

$$b = 2^{m-1}a$$

übergegangen. Ist nun der Käufer kein Freund von hohem Glücksspiel, so kann er sich mit dem ersten Spieler auch auf einen niedern Preis c einigen, wenn nämlich dieser den gewissen Gewinn der Hoffnung dermassen vorzieht, dass er gern ein Geschenk von $a-c$ dazu verwendet, die Unlust des Käufer's zu überwinden. So lassen sich in der Tat subjective Elemente beim Handel mitwirkend denken; nur sind diese ganz verschieden von den in Bernoulli's Hypothese vorausgesetzten. Das angeführte Beispiel zeigt weder einen Mangel der alten Theorie noch eine Besserung durch die neue.

Hoppe.

Erd- und Himmelskunde.

Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Par H. Poincaré, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté. Tome II. Methodes de M. M. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin. Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 479 S.

Der 2. Band enthält folgende Capitel: Formelle Rechnung, Methoden von Newcomb und Lindstedt, Anwendung zur Untersuchung der säcularen Variationen, Anwendung auf das Problem der 3 Körper, Anwendung auf die Bahnen, Divergenz der Reihen von Lindstedt, directe Berechnung der Reihen, anderes Verfahren directer Rechnung, Methoden von Gyldén, Fälle linearer Gleichungen, Fälle nicht linearer Gleichungen, Methoden von Bohlin, Reihen von Bohlin, Ausdehnung der Methoden von Bohlin. Die neuen Methoden sind dadurch charakterisirt, dass die säcularen Terme entfernt werden, mithin die Reihen nur periodische Terme haben.

H.

Annuaire pour l'an 1896, pour l'an 1897, pour l'an 1898. Publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris. Gauthier-Villars et fils.

La maison Gauthier-Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1898. — Ce petit volume compact contient comme toujours une foule de renseignements scientifiques qu'on ne trouve que là. Le volume de cette année contient en outre les Notices suivantes: Sur la stabilité du système solaire; par M. H. Poincaré. — Notice sur l'oeuvre scientifique de M. H. Fizeau; par M A. Cornu — Sur quelques progrès accomptis avec l'aide de la Photographie dans l'étude de la surface lunaire; par MM. M. Loewy et P. Puiseux. — Sur les travaux exécutés 1897 à l'observatoire du mont Blanc; par M. J. Janssen. — Discours prononcés au cinquantenaire académique de M. Faye, le 25 janvier 1897; par MM. J. Janssen et M. Loewy. In-18 de VI – 806 pages, avec 2 Cartes magnétiques: 1 fr. 50 franco 1 fr. 85).

Gauthier-Villars et fils.

Das erste (für 1896) enthält als Anhang folgende Aufsätze. A. Cornu: Die Fernkräfte und die Undulationen. — Die Arbeiten Fresnel's in der Optik. — De Bernardières: Ueber die Construction der neuen magnetischen Karten des Globus unternommen

unter der Direction des Bureau des Longitudes. — J. Janssen: Ueber eine dritte Besteigung des Gipfels des Montblanc zum Observatorium und die während des Jahres 1895 im Grunde dieses Gebirgs ausgeführten Arbeiten. — Bernardiéres: Notiz über das Leben und die Arbeiten des Contreadmirals Fleuriais. — J. Janssen und F. Tisserand: Rede gehalten beim Leichenbegängniss von E. Brunner. — Das Annuaire für 1897 gibt im Anhang folgende Aufsätze. F. Tisserand: Notiz über die eigene Bewegung des Sonnensystems. — H. Poincaré: Die kathodischen und die Röntgen-Strahlen. — J. Janssen: Die Epochen in der astronomischen Geschichte der Planeten. — F. Tisserand: Notiz über die 4. Versammlung des internationalen Comites für Ausführung der photographischen Karte des Himmels. — Notiz über die Arbeiten der internationalen Commission der fundamentalen Sterne. — A. Cornu: Rede gehalten beim Leichenbegängniss von Tisserand. — J. Janssen: Arbeiten auf dem Montblanc 1896. H.

Annuaire de l'observatoire de Montsouri's pour l'année 1896, p. l'a. 1897, p. l'a. 1898. (Analyse et travaux de 1894 Météorologie). — Chimie. — Micrographie. — Applications à l'hygiène. Paris. Gauthier-Villars. 503 + 664 + 636 S.

Dieses Annuaire enthält ausser dem Kalender, der Auf- und Untergang der Sonne und des Mondes anzeigt, viele tabellarisch aufgestellte physikalische und hygienische Beobachtungsresultate bezüglich auf Paris und Frankreich. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Dirichlet's, G. Lejeune, Werke hrsg. auf Veranlassg. der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften v. L. Kronecker. Fortgesetzt v. L. Fuchs. 2. (Schluss) Bd. gr. 4°. (X, 422 S.) Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

Fortschritte der Physik, hrsg. v. d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. Namensregister nebst e. Sach-Ergänzungregister zu Bd. XXI (1865) bis XLIII (1887) unter Berücksicht. der in den Bdn. I—XX enthaltenen Autorennamen. Bearb. v. B. Schwalbe. 1. Hälfte. gr. 8°. (VII, 640 S.) Berlin, G. Reimer. 30 Mk.

—, dass. i. J. 1891. 47. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (XLII, 752 S.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 30 Mk. — dass. im Jahre 1896. 52. Jahrg. Ebd. 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (LXX, 476 S.) 20 Mk.; 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. (XLV, 531 S.) gr. 8°. 21 Mk.

Haentschel, E., über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Eine historisch-krit. Studie. gr. 8°. (8 S. m. 1 Fig.) Leipzig, Dürr'sche Buchh. 40 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Herausg. von Emil Lampe. 26. Bd. Jahrg. 1895. (In 3 Hftn.) 1. u. 2. Hft. gr. 8°. Berlin, G. Reimer. 19,90 Mk.

Kronecker's, Leop., Werke. Hrsg. v. K. Hensel. 2. Bd. gr. 4°. (VIII, 541 S.) Leipzig, Teubner. 36 Mk.

Oswald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 91. Dirichlet, G. Lejeune, Untersuchung üb. verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839—1840). Deutsch hrsg. v. R. Haussner. 8⁰. (128 S.) Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Methode und Principien.

Danmar, Wm., die Schwere, ihr Wesen u. Gesetz. Isaak Newton's Irrtum. Das Wesen des Stoffs u. das Gesetz der Natur. Begründung der wissenschaftl. Metaphysik. gr.8⁰. (VII, 128 S. m. 21 Fig.) Zürich, Verlags-Magazin. 3 Mk.

Drude, P., über Fernwirkungen. gr.8⁰. (XLIX, 18 S.) Leipzig, Barth. 1 Mk.

Dyck, Walth., üb. die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen u. der angewandten Mathematik. Festrede. gr.8⁰. (38 S.) München, Franz' Verl. 1,20 Mk.

Heinze, u. Hübner, Methodik des Rechnens. Lehrer-Ausg. des Rechenbuchs f. einfache Schulverhältnisse (Ausg. D), enth. Aufgaben u. Auflösgn. m. method. Anweisgn. u. 90 meist ausgeführten Lektionen. gr.8⁰. (XXIX, 160 S. m. Fig.) Breslau, Goerlich. 1.80 Mk.

Lippmann, Edm., Robert Mayer u. das Gesetz v. der Erhaltung der Kraft. gr.8⁰. (36 S.) Leipzig, Pfeffer. 60 Pf.

Nippoldt, W. A., die Entstehung der Gewitter u. die Principien des Zweckes und Baues der Blitzableiter m. e. Anh. üb. die Methoden der Blitzableiterprüfungen. gr.8⁰. (80 S. m. 6 Abbildgn.) Frankfurt a./M. Gebr. Knauer. 2 Mk.

Riecke, Ed., die Principien der Physik u. der Kreis ihrer Anwendung. Lex.-8⁰. (40 S.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 30 Pf.

Seeger, Organisation des Unterrichts im Rechnen u. in der Arithmetik. gr.8⁰. (III, 45 S.) Güstrow, Opitz & Co. 50 Pf.

Sinram, A., Fragmente II zum kosmischen Bewegungsgesetz (Incitations Theorie) u. zur Mechanik des Himmels. (Berichtigungen u. Ergänzungen der Fragmente v. I. V. 1897.) gr.8⁰. (14 S.) Hamburg, Gräfe & Sillem. 40 Pf.

Streng, Karl, Praktische Anleitung zur Behandlung des Rechenunterrichtes in der Volksschule. 2. Bd. Das Rechnen auf der Mittel- u. Oberstufe. (4., bzw. 5. bis 8. Schulj.), die geometrische Formenlehre, sowie die Flächen- u. Körperberechngn. gr.8⁰. (X, 436 S. m. Fig.) Wien, Pichler's Ww. & Sohn. 4,60 Mk.

Wachs, D., die Kraft. Eine physikal. Studie. gr.8⁰. (15 S.) Wien, Breitenstein. 35 Pf.

Lehrbücher.

Bork, H., P. Crantz, E. Haentschel, Mathematischer Leitfaden f. Realschulen. 2. Tl.: Trigonometrie u. Stereometrie. gr. 8°. (128 S. m. 2 Fig.) Leipzig, Dürr'sche Buchh. 1,40 Mk.

Bussler, Fr., die Elemente der Mathematik für höhere Lehranstalten bearb. 2 Thle. 2. Aufl. gr. 8°. (Mit Fig.) Dresden, Ehlermann. Geb. 1. Pensum f. die Mittelklassen (Quarta bis Untersekunda). (IV, 151 S.) 1,50 Mk. — 2. Pensum für Oberklassen (Obersekunda u. Prima). (IV, 234 S.) 2 Mk. 60 Pf.

Moshammer, Karl, Hydromechanik. Lehrtext zum Gebrauche an höheren Gewerbeschulen u. Buch zum Selbststudium. Lex.-8°. (73 S. m. 100 Abbildgn.) Wien, Deuticke. 2 Mk.

Sammlungen.

Baur, Ludw., Rechenbuch f. Lehrer u. Lehramtszöglinge. Resultate zu den Aufgaben gr. 8° (20 S.) Stuttgart, Steinkopf. 40 Pf.

Bussler, Fr., Mathematisches Uebungsbuch. 1. Tl. Für den Gebrauch in den mittleren Klassen höherer Lehranstalten (Untertertia bis Untersekunda) zusammengestellt. 2. Aufl. gr. 8°. (IV, 88 S.) Dresden, Ehlermann. Geb. 1 Mk.

Dorn's Aufgaben f. mündliches u. schriftliches Rechnen. Ausg. C. f. höhere Mädchenschulen. Nach den ministeriellen Bestimmgn. üb. das Mädchenschulwesen vom 31. V. 1894 bearb. v. A. Elsner u. R. Sendler. Resultate zum 2. — 7. Hft. gr. 8°. Breslau, Handel. 1,30 Mk.

Fink, K., Sammlung von Sätzen u. Anfgaben zur systematischen u. darstellenden Geometrie der Ebene in die Mittelschule. 3. Kurs.: Ueber die Abbildgn. geometr. Systeme. 4. Kurs.: Einführung in die Grundlehren der projektiven Geometrie. Als Hilfsbuch f. die Schule bearb. gr. 8°. (XXIV, 268 S. m. 120 Fig.) Tübingen, Laupp, 4 Mk.

Gönnenwein, G., Rechenbuch. Stufenmässig geordnete Sammlg. von Aufgaben f. das 5. u. 6. Schulj. Schüler-Ausg. 8°. Stuttgart, Lung. Kart. à 35 Pf.; Lehrerausg. à 1,20 Mk.

Grassmann, R., Aufgaben zu den Gleichungen 1. Grades m. 1 u. mehreren Unbekannten. Enth. 970 Aufgaben. gr. 8°. (24 S.) Stettin, Grassmann. 10 Pf.; Auflösgn. (30 S.) Geb. 40 Pf.

Haberer, Karl, Rechenbuch f. kaufmännische Fortbildungsschulen u. einklassige Handelsschulen f. Mädchen. 3 Thle. gr. 8°. Wien, Hölder. Kart. 2,28 Mk.

Hellermann, K., u. L. Krämer, Aufgaben f. das Kopfrech-

nen zum Gebrauch f. Lehrer. In 3 Hftn. (Unter-, Mittel- u. Ober-Stufe). 2 Aufl. gr. 8°. Berlin, Oehmigke's Verl. 5,60 Mk.

Hiemes, Karl Heinr., Rechenbuch f. Elementar- u. Volksschulen. gr. 8°. (VI, 117 S.) Kronstadt, Zeidner. Geb. 90 Pf.

Kleyer, A., Aufgaben-Sammlg. 1368—1374. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Klunzinger, K., zweimal 1000 Aufgaben f. das mündliche u. schriftliche Rechnen zum Gebrauch für Schulaspiranten, Landexamenskandidaten, gehobene Oberklassen u. Fortbildungsschulen. Schülerausg. 4. Aufl. 8°. (146 S.) Stuttgart, Lung. Kart. 1,40 Mk.; Lehrerausg. (243 S.) 2,80 Mk.

Küffner, Ed. u. Al. J. Ruckert, Rechenbuch f. die Volksschule, unter Mitwirkung erfahrener Schulmänner. 4. Lehrerhft. Der Zahlenraum bis zu den Millionen. Zweifach benannte Zahlen m. decimaler Einteilg. 8°. (82 S.) Würzburg, Bucher. 80 Pf.

Lieber, H. u. C. Müsebeck, Aufgaben üb. kubische u. diophantische Gleichungen, Determinanten u. Kettenbrüche, Kombinationslehre u. höhere Reihen. gr. 8°. (V, 129 S.) Berlin, Simion. 2,40 Mk.

Löser, J., praktisches Rechenbuch f. deutsche Schulen. 4. Hft. Jubiläums-Aufl. Lehrerheft. 8°. (100 S. m. Fig.) Weinheim, Ackermann. 1 Mk.

Martus, H. C. E., mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Reifeprüfungen an preuss. Gymnasien u. Realgymnasien gestellten Aufgaben ausgewählt u. mit Hinzufügung der Ergebnisse (II. Tl.) zu e. Uebungsbuche vereint. 2 Tle. gr. 8°. Dresden, Koch. 1. Aufgaben. 10. Doppelaufl. (XVI, 194 S.) 3,60 Mk.; geb. 4 Mk. 2. Ergebnisse der Aufgaben des I. Teiles. 9. u. 10. Aufl. (276 S.) 4,80 Mk.; geb. 5,20 Mk.

Quitzow, W. A., Rechenbuch f. Schulen. Neue Ausg., bearb. v. Thdr. Wilke. Lübeck, Quitzow. 1. Tl. Hft. a—c. 8°. 80 Pf. Antworten zum 1. Tl., Hft. b. 8°. (16 S.) 25 Pf.

Reidt, Fdr., Sammlung von Aufgaben u. Beispielen aus der Trigonometrie u. Stereometrie. II. Tl: Stereometrie. 4. Aufl. Neu bearb. v. A. Much. gr. 8°. (VIII, 194 S.) Leipzig, Teubner. 3 Mk. — Resultate der Rechnungs-Aufgaben. (58 S.) 1 Mk.

Roth, Rich., landwirtschaftliche Berechnungen. Eine Sammlg. v. Aufgaben f. den Unterricht im landwirtschaftl. Rechnen. Für mittlere u. niedere landwirtschaftl. Schulen bearb. gr. 8°. (VI, 103 S.) Chemnitz, Bülz. 1,20 Mk.

Schaewen, P., 500 Aufgaben aus dem mathematischen Pensum der Untersekunda. gr. 8°. (28 S.) Halle, Strien. 80 Pfg.; Resultate (nur an Lehrer.) (7 S.) 1 Mk.

Stahel's Sammlung von Prüfungsaufgaben Nr. 2.: Absolutorialaufgaben in Bayern. 1. Hft. Ducrue, Jos., Aufgaben aus der Mathematik u. Naturwissenschaft, gegeben an den humanist. Gymnasien, Real-Gymnasien u. Realschulen Bayerns. Als Uebungsstoff f. den Repetitionsunterricht zusammengestellt. 7. Aufl. (Ergänzt bis 1897.) 12⁰. (III, 124 S.) Würzburg, Stahel. 1 Mk.

Vöhringer, L., Rechenschule. Stufenmässig geordnete Beispielsammlg. f. das mündl. u. schriftl. Rechnen in niederen u. höheren Schulen. III. Bdchn. Das Rechnen mit mehrfach benannten ganzen Zahlen im 4. Schuljahr. 3. Aufl. 8⁰. (VII, 119 S.) Stuttgart, Lung. Kart. 90 Pf.

Wenzel, Karl, Rechenbuch f. kaufmännische Fortbildungsschulen. Antwortenheft. 1. u. 2. Tl. gr. 8⁰. (29 u. 40 S.) Hannover, Meyer. à 60 Pf.

Tabellen.

Biscan, Wilh., Formeln u. Tabellen f. den praktischen Elektrotechniker. Hilfs- u. Notizbuch. Mit Holzsch. u. 4 Taf. 3. Aufl. 12⁰. (IV. 130 S. m. Notizbuch.) Leipzig, Leiner. Geb. 2 Mk.

Engelmann, Th. W., Tafeln u. Tabellen zur Darstellung der Ergebnisse spectroskopischer u. spectrophotometrischer Beobachtungen. gr. 8⁰. (4 S. m. 2 Tab. u. 2 farb. Taf. in je 10 Explren.) Leipzig, Engelmann. 1,80 Mk.; 10 Expl. einer Taf. ohne Text u. Tab. 1 Mk.

Hartenstein, H., fünfstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln, f. d. Schulgebrauch hrsg. gr. 8⁰. (III, 123 S.) Leipzig, Teubner. Geb. 1 Mk. 40 Pf.

Jelinek, Laur., logarithmische Tafeln f. Gymnasien u. Realschulen. 3. Aufl. Sammt Anleitg. gr. 8⁰. (IV, 157 S.) Wien, Pichler's Ww., Sohn. Geb. 1,50 Mk.

Müller, Carl, Adf, Multiplikations-Tabellen, auch f. Divisionen anwendbar. Bearb. nach e. neuen Anordnung. gr. 8⁰ (VIII, 201 S. m. 1 Tab. auf Leinw.-Pap.) Karlsruhe, G. Braun. Geb. 3 Mk.

Murai, Heinr., Zinseszinsen-, Einlage-, Renten- u. Amortisations-Tabellen, auf 10 Decimalstellen berechnet. Mit 362 ausgearbeiteten Amortisationsplänen. gr. 8⁰. (157 u. IV, 344 S.) Berlin, Gesellius. Geb. 20 Mk.

Opus palatinum, Sinus- u. Cosinus-Tafeln von 10′ z. 10″. Hrsg. v. W. Jordan. gr. 8⁰. (VII, 270 S.) Hannover, Hahn. 7 Mk.

Person, Benj., Tabellen zur Bestimmung der Trägheitmomente symmetrischer u. unsymmetrischer beliebig zusammengesetzter Querschnitte für Bauingenieure, Maschineningnieure u. Architeken. gr. 4⁰. (V, 20 S. m. 5 Fig.) Zürich, Speidel. 2 Mk.

Reinhardt, Karl, Steuerungstabellen für Dampfmaschinen mit Erläuterungen nach den Müller'schen Schieberdiagrammen u. mit Berücksichtigung einer Pleuelstangenlänge gleich dem fünffachen Kurbelradius, sowie beliebiger Exzenterstangenlänge für einfache u. Doppel-Schiebesteurgn. Mit zahlreichen Beispielen. Lex.-8°. (VIII, 112 S. m Fig.) Berlin, Springer. Geb. 6 Mk.

Sachs, J., Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke. gr. fol. Stuttgart, Maier. 50 Pf.

Schmidt, H. C., Zahlenbuch. Produkte aller Zahlen bis 1000 mal 1000. Ein Hülfsrechenbuch das alle Multiplicationen erspart, u. das übrige Zahlenrechnen ausserordentlich abkürzt. Entworfen v. C. Caris. Lex.-8°. (VII, 279 S.) Aschersleben, Bennewitz. Geb. 10 Mk.

Schülke, A., vierstellige Logarithmen-Tafeln, nebst mathemat., physikal. u. astronom. Tabellen für den Schulgebrauch zusammengestellt. 2. Aufl. Lex.-8°. (IV, 18 S.) Leipzig, Teubner. Kart. 60 Pf.

Schultz, E., vierstellige mathematische Tafeln. (Ausg A.) für gewerbliche Lehranstalten. 2. Aufl. gr. 8°. (V, 80 S.) Nebst Anleitung zum Gebrauche der mathemat. Tabellen in den techn. Kalendern. An 25 Beispielen aus der Praxis erläutert. 2. Aufl. 16°. (31 S.) Essen, Baedeker. Geb. 1,20 Mk.

— , dass. (Ausg. B.) f. höhere Schulen. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 46 u. 80 S.) Ebd. Geb. 1 Mk.

— , mathematische u. technische Tabellen f. Handwerker- u. Fortbildungsschulen. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 64 S.) Ebd. Geb. 60 Pf.

— , vierstellige Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen u. der Winkelfunktionen zum Gebrauche an Gymnasien. gr. 8°. (IV, 80 S.) Ebd. Geb. 80 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Blanke, W., Rechenschule. 2. Hft. Das Rechnen mit benannten Zahlen. 3. Aufl. gr. 8°. (IV, 64 S.) Bremen, Kaiser. Geb. 65 Pf.

Büttner, A., Kopfrechenschule. 2. Tl. Rechenstoffe f. die Oberstufe mehrklass. Schulen, sowie f. Präparandenanstalten u. Fortbildungsschulen. 2. Aufl. 8°. (110 S.) Leipzig, Hirt & Sohn. Geb. 1,25 Mk.

Feller, F. E. u. C. G. Odermann, das Ganze der kaufmännischen Arithmetik zum 10. Male bearb. v. Carl Gust. Odermann. 17. Aufl. gr. 8°. (X, 467 S.) Leipzig, O. A. Schulz Verl. 4,50 Mk. Auflösungen der Uebungsaufgaben (20 S.) 60 Pf.

Fricke, R. u. Fel. Klein, Vorlesungen üb. d. Theorie der

automorphen Functionen. 1. Bd. Die gruppentheoret. Grundlagen. gr. 8°. (XIV, 634 S. m. 192 Fig.) Leipzig, Teubner. 22 Mk.

Hintz, O., grosser Rechenmeister. Eine gründliche Unterweisg. in der gesamten Rechenkunst. Zum Selbstunterricht, sowie zum Gebrauche in Fortbildungsschulen hrsg. 8°. (XI, 515 S. m. 55 Fig.) Berlin, Friedberg & Mode. 3 Mk.

— , kleiner Rechenmeister. Praktische Unterweisung in der Rechenkunst. Zur gründl. Selbstbelehrg. f. jedermann, insbesondere f. Gewerbetreibende, Landwirte, Militärpersonen, Beamte etc. sowie zum Gebrauche in Fortbildungsschulen hrsg. 8°. (VI, 249 S.) Ebd. 1,80 Mk.

Klein, F., ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I. u. II. Vorlesung. 4°. I. Geh. im Wintersemester 1895-96. Ausgearb. v. A. Sommerfeld. (V, 391 autogr. S. m. Fig.) II. Geh. im Sommersemester 1896. Ausgearb. v. A. Sommerfeldt u. Ph. Frutwängler. (V, 354 autogr. S.) Leipzig, Teubner. 14,50 Mk.

Krause, Mart., Theorie der doppelperiodischen Functionen e. veränderlichen Grösse. 2 (Schluss-)Bd. gr. 8°. (XII, 306 S.) Ebd. 12 Mk.

Kreibig, Jos. Edm., Leitfaden des kaufmännischen Rechnens f. zweiklassige Handelsschulen. gr. 8°. (VI, 287 S.) Wien, Hölder. Kart. 2,64 Mk.

Küpper, Karl, die primitiven u. unprimitiven Specialgruppen auf C_p^n. gr. 8°. (14 S.) Prag, Rivnáč. 20 Pf.

Láska, W., Beitrag zur Integration der numerischen Differential-Gleichungen. gr. 8°. (10 S.) Ebd. 20 Pf.

Lerch, M., sur quelques formules concernant les fonctions elliptiques et les intégrales Eulériennes. gr 8°. (11 S.) Ebd. 20 Pf.

Loria, Gino, Integrali Euleriani e spirali sinosoidi. gr. 8. (6 S.) Ebd. 20 Pf.

Mertens, F., über Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält. gr. 8°. (33 S.) Wien, Gerold's Sohn. 70 Pf.

— , über e. algebraischen Satz. gr. 8°. (9 S.) Ebd. 30 Pf.

— , über e asymptotischen Ausdruck. gr. 8°. (11 S.) Ebd. 30 Pf.

Pleskot, Ant., über die Grenzen der Wurzeln e. Gleichung m. nur reellen Wurzeln. gr. 8°. (9 S.) Prag, Rivnáč. 20 Pf.

Rogel, Frz., combinatorische Beziehungen zwischen Summen von Teilerpotenzen. gr. 8°. (9 S.) Ebd. 20 Pf.

Stolz, O., zwei Grenzwerte, v. welchen das obere Integral e. besonderer Fall ist. gr. 8°. (15 S.) Wien, Gerold's Sohn. 40 Pf.

Studnička, F. J., Neuer Beitrag zur Theorie der Potenz- u. Kombinations-Determinanten. gr. 8°. (16 S.) Prag, Rivnáč. 24 Pf.

Traber, W. L., Algebra. Ein Lehrheft f. Lehrer u. Schüler techn. u. gewerbl. Lehranstalten. Kurz u. leicht fasslich zusammengestellt. 2 Thle. gr. 8°. Giessen, Balser. Geb. 1,80 Mk.

Würsdörfer, J., Strömungen aus dem Gebiete des Rechenunterrichts m. besonderer Berücksichtigung der „Sachgebiete des Rechnens". Vortrag. gr. 8°. (33 S.) Stuttgart, Süddeutsche Veragsbuchh. 50 Pf.

Zindler, Konr., über die Differentiation mehrfacher Integrale nach e. Parameter, v. dem auch die Grenzen abhängen. gr. 8° (6 S.) Wien, Gerold's Sohn. 20 Pf.

Geometrie.

Binder, Wilh., die Undulationen ebener Curven C^4_6. (1. Mitteilg.) gr. 8°. (28 S. m. 12 Taf.) Wien, Gerold's Sohn. 1,40 Mk.

Dietsch, Chrph., Leitfaden der darstell. Geometrie. Mit 88 in den Text eingedr. Fig. u. sehr vielen Aufgaben. 3. Aufl. gr. 8°. (IV, 152 S.) Leipzig, Deichert Nachf. 2,20 Mk.

Dobriner, Herm., Leitfaden der Geometrie f. höhere Schulen. Mit 375 z. Tl. farb. Fig. gr. 8. (XV. 139 S.) Leipzig, Voigtländer. 2,40 Mk.

Girndt, Mart., Raumlehre f. Baugewerbeschulen u. verwandte gewerbliche Lehranstalten. 1. Tl.: Lehre v. den ebenen Figuren Mit 276 Fig. im Text u. 227 der Baupraxis entlehnten Aufgaben. gr. 8°. (VII, 99 S.) Leipzig, Teubner. Kart. 2,40 Mk.

Holl, W., Lehrbuch der Geometrie. Die Lehre v. den geometrischen Raumgrössen in geeigneter Verbindung mit Zeichnen u. Rechnen. 3. Aufl. v. K. Holl. 8°. (IX, 131 u. 76 S. m. Fig.). Stuttgart, Kohlhammer. Kart. 1,80 Mk.

Kohn, Gust., über räumliche Poncelet'sche Polygone. gr. 8°. (7 S.) Wien, Gerold's Sohn. 20 Pf.

Molke, Roman, über diejenigen Sätze Jacob Steiner's, welche sch auf die durch. e. Punkt gehenden Transversalen e. Kurve $n$ter Ordnung beziehen. gr. 8°. (81 S.) Breslau, Schletter. 1 Mk.

Pözl, Wenzelaus, Elemente der darstellenden Geometrie, zum Schulgebrauch zusammengestellt. I Tl.: Geradlinige ebene Gebilde. Neue [Titel-]Ausg. gr. 8°. (VI, 60 S. m. 81 Fig.) München, Th. Ackermann. 1,20 Mk.

Pyrkosch, Rhld., über Poncelet'sche Dreiecke, besonders solche, welche confocalen Kegelschnitten ein- u. umgeschrieben sind. gr. 8°. (61 S. m. 4 Fig.) Breslau, Schletter. 80 Pf.

Rothe, Rud., Untersuchungen üb. die Theorie der isothermen Flächen. Diss. gr. 4°. (42 S.) Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk.

Sachs, J., Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 8. Tl.: Die Anwendung der Aehnlichkeit auf die Lehre vom Kreis. Bearb. nach System Kleyer. gr. 8°. (VII, 226 S. m. 135 Fig. u. 1 Tab.) Stutttgart, Maier. 5 Mk.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellen Geometrie 1. Tl.: Specielle darstell. Geometrie. Mit 183 Fig. 3. Aufl. gr. 8°. (IV, 154 S.) Dresden. Kühtmann. 3,60 Mk.

Tengler, Frz., Construction der conjugirten Durchmesser, resp. Achsen eines Kegelschnittes, der einem gegebenen Polar reciprok ist. gr. 8°. (12 S.) Klagenfurt, Kleinmayr. 1 Mk.

Waelsch, Emil, über Flächen mit Liouville'schem Bogenelement. gr. 8°. (6 S.) Wien, C. Gerold's Sohn. 20 Pf.

Walter, Alois, über e. Satz von Chasles u. üb. dessen Zusammenhang m. der Theorie der Momentanaxe. gr. 8°. (13 S.) Leoben, Nüssler. 1 Mk.

Trigonometrie.

Brüklen, O, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit Beispielen u. 280 Uebungsaufgaben f. höhere Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. 8°. (VII, 122 S. m. 40 Fig.) Heilbronn, Schröder & Co. Geb. 1,50 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Dreiecknetz, das schweizerische, (der internationalen Erdmessung), hrsg. v. der schweizer. geodät. Kommission. 7. Bd.: Messerschmidt, J. B., Relative Schwerebestimmungen. 1. Tl. Im Auftrage ausgeführt u. bearb. gr. 4°. (IV. 216 S. m. 3 Taf.) Zürich, Fäsi & Beer. 10 Mk.

Höhenbestimmungen, trigonometrische u. barometrische, (Normalnull-Höhen) in Württemberg, bezogen auf den einheitlich deutschen Normalnullpunkt. Donaukreis. 14. Hft. Oberamtsbez. Ulm. Bearb. v. C. Regelmann. Hrsg. v. dem k. statist. Landesamt. gr. 8°. (38 S.) Stuttgart, Lindemann. Kart. 50 Pf.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 2. Bd.: Feld- u. Land-Messg. 5. Aufl. Mit 635 Zeichngn. im Text. 2. Lfg. gr. 8°. (XII u. S. 417—785 u. Anh 47 S.) Stuttgart, Metzler's Verl. 8,20 Mk. (II. Bd. kplt. 16,20 Mk.)

Landes-Triangulation, die königl. preussische. Hauptdreiecke. 9. Thl. A. Die rheinisch-hess. Dreieckskette. — B. Das Basisnetz bei Bonn. — C. Das niederrhein. Dreiecksnetz. Gemessen u. bearb. v. der trigonometr. Abtheilg. der Landesaufnahme. Mit e. Uebersichtstaf. u. 19 Skizzen. Lex.-8⁰. (XII, 484 S.) Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 15 Mk.

Láska, W., über Hauptgleichungen der Geodäsie. gr. 8⁰. (13 S.) Prag, Rivnáč. 20 Pf.

Schreiber, O. die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abtheilg. der Landesaufnahme. Lex.-8⁰. (IV, 99 S.) Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 3 Mk.

Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Institutes. Kühnen, Fr., die Vermessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin u. Bonn, ausgeführt durch das geodät. Institut. Unter Mitwirkung v. R. Schumann bearb. gr. 4⁰. (IV, 121 S. m. 4 Taf.) Berlin, Stankiewicz. 9 Mk.

Mechanik.

Boltzmann, Ludw., Vorlesungen üb. die Principe der Mechanik. (In 3 Thln.) I. Thl., enth. die Principe, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integrirt werden, welche Variationen der Coordinaten od. ihrer Ableitgn. nach der Zeit enthalten. gr. 8⁰. (X, 241 S. m. 16 Fig.) Leipzig, Barth. 6 Mk.

Klein, F. u. A. Sommerfeld, über die Theorie des Kreisels. 1. Hft. Die kinemat. u. kinet. Grundlagen der Theorie.. gr. 8⁰. (196 S.) Leipzig, Teubner. 5,60 Mk.

Lauenstein, R., die graphische Statik. Elementares Lehrbuch f. techn. Unterrichtsanstalten u. zum Gebrauch in der Praxis. 4. Aufl. gr. 8⁰. (VI, 235 S. m. 255 Abbildgn.) Stuttgart, Bergsträsser. Geb. 6 Mk.

Schwartze, Thdr., neue Elementar-Mechanik f. technische Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. Mit e. Vorwort v. F. Reuleaux. 8⁰. (XVI, 359 S. m. 212 Abbildgn.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 4,80 Mk.

Weber's illustr. Katechismen. Nr. 70. Huber, Ph., Katechismus der Mechanik. 6. Aufl., neu bearb. v. Walth. Lange. Mit 196 in den Text gedr. Abbildgn. (XV, 271 S.) 12⁰. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 3,50 Mk.

Weisse, H., das Flug-Gesetz als Grundlage zur Lösung des Flug-Problems im Sinne des Buttenstedt'schen Princips. Mit 1 Fig.-Taf. gr. 8⁰. (45 S.) Kiel, Lipsius & Tischer. 1 Mk.

Wilczynski, E. J., Hydrodynamische Untersuchungen u. Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Diss. gr. 8°. (34 S.) Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk.

Technik.

Anleitung zum Bau elektrischer Haustelegraphen-, Telephon- u. Blitzableiter-Anlagen. Hrsg. v. der Aktiengesellschaft Mix & Genest. 4. Aufl. gr. 8°. (XV, 382 S. m. 528 Abbildgn.) Berlin, Polytechn. Buchh. A. Seydel. 4,50 Mk.

— , praktische, zur Anlage v. Blitzableitern. Mit 26 Abbildgn. in Holzschn. 3. Aufl. gr. 8°. (44 S.) Leipzig, Leiner. 60 Pf.

Bibliothek, elektrotechnische. 11. Bd. Urbanitzki, Alf., die elektrischen Beleuchtungs-Anlagen m. besond. Berücksicht. ihrer praktischen Ausführung. Mit 113 Abbildgn. 3. Aufl. (VIII, 240 S.) 8°. Wien, Hartleben. 3 Mk.

Encyklopaedie der Photographie. 27.—29. Hft. gr. 8°. Halle, Knapp. 27. Mercator, G., die Diapositivverfahren. Praktische Anleitung zur Herstellg. v. Fenster-, Steroscop- u. Projektionsbildern mittels älterer, neuerer u. neuster Druckverfahren. (V, 93 S.) 2 Mk. — 28. Büttner, O. u K. Müller, Te chnik u. Verwerthung der Röntgen'schen Strahlen im Dienste der ärztlichen Praxis u. Wissenschaft. Mit 29 in den Text gedr. Abbildgn. u. 5 Taf. (V, 146 S.) 3 Mk. — 29. David, Ludw., die Moment-Photographie. Mit 122 Textbildern. gr. 8°. (VIII, 241 S.) 8 Mk.

Ernecke, Erich, über elektrische Wellen u. ihre Anwendung zur Demonstration der Telegraphie ohne Draht nach Marconi. Experimentalvortrag. gr. 8. (15 S. m. 12 Abbildgn.) Berlin, Gaertner. 80 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Berlin, Springer. 9 Jahrg. 1895. 2. Hft. 5 Mk 11. Jahrg. 1897. 1. Hft. 5,60 Mk.

Gaisberg, S., Taschenbuch f. Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen. 14. Aufl. 12°. (VIII, 203 S. m. Fig.) München, Oldenbourg. Geb. 2,50 Mk.

Grossmann, Ludw., die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft u. Versicherungstechnik. 9. Lfg. gr. 8°. (Suppl.-Bd. VII, 80 S.) Wien, (III. Sofienbrückeng. 14) Selbstverlag. 5 Mk.

Grünwald, F., die Herstellung u. Verwendung der Akkumulatoren in Theorie u. Praxis. Ein Leitfaden. 2. Aufl. 12°. (VI, 154 S. m 83 Abbildgn.) Halle, Knapp. 3 Mk.

Gümbel, L., das Stabilitätsproblem des Schiffbaues. Mit 28 Textfig. u. 6 lith. Taf. gr.8° (VI, 49 S.) Berlin, Siemens. 2,40 Mk.

Hartmann, Konr. u. J. O. Knoke, die Pumpen. Berechnung u. Ausführung der f. die Förderung v. Flüssigkeiten gebräuchl. Maschinen. 2. Aufl. gr.8°. (IX, 666 S. m. 664 Fig. u. 6 Taf.) Berlin, Springer. Geb. 16 Mk.

Holzt, A., Elektrotechniker. 24. Hft. Leipzig, Schäfer. 75 Pf.

Jungclaus, H. A., Magnetismus u. Deviation der Compasse. 2 Aufl. Anh.dazu, Ueber die Einwirkg. der elektr. Licht- u. Kraftübertragungs-Anlagen in Schiffen auf den Compass. 8°. (24 S.) Bremerhaven, Schipper. 60 Pf.

Karmarsch, Karl, Handbuch der mechanischen Technologie. In 5. Aufl. hrsg. v. E. Hartig 6. Aufl. hrsg. v. Herm. Fischer. 14. Lfg., bearb. v. Herm. Fischer u. Ernst Müller gr.8°. (3. Bd. S. 1151–1296 m. Abbildgn.) Berlin, W. & S. Loewenthal. 5 Mk.

Lewerenz, Ernst, Hilfsbuch f. die Telegraphen- u Fernsprechtechnik. Unter besonderer Berücksichtigung der Telegraphen- u. Fernsprecheinrichtungen der deutschen Reichs-Post- u. Telegraphenverwaltung. Mit 67 in den Text gedruckten Abbildungen u. 4 farbigen Tafeln. 8°. (XI, 134 S.) Berlin, Springer. Geb. 4 Mk.

Lisegang, R. Ed., die Entwicklung der Auscopir-Papiere. gr.8°. (60 S.) Düsseldorf, Liesegang. 1 Mk.

Lolling, Heiko, Konstruktionsblätter praktisch ausgeführter Maschinenanlagen, nebst erläut. Text u. elementar gehaltenen Berechnung als Unterlage f. prakt. Ausführgn. techn. Lehranstalten u. zum Selbstunterricht hrsg. 1. Tl. Dampfkessel- u. Dampfkesselanlagen. Fol. (III, 33 S. m. 16 Taf. in Aupeldruck.) Köln. Neubner, In Mappe 3,60 Mk.

Lueger's, O., Lex. d. Technik. 25. u. 26. Abthlg. Stuttgart, Deutsche Verlags Anstalt. à 5 Mk.

Luxenberg, M., die Bogenlicht-Schaltungen u. Bogenlampen-Gattungen. 2. Aufl. gr.8°. (51 S. m 4 Taf.) Leipzig, Leiner. 2.50 Mk.

Meissner, G., Hydraulik. 2. Aufl. 23. Lfg. Jena, Costenoble. 3 Mk.

— , die Kraftübertragung auf weite Entfernungen u. die Konstruktion der Triebwerke u. Regulatoren. 2. Aufl. v. Jos. Krämer. 1. Bd. gr 8° (387 S. m. 30 Taf.) Ebd 18 Mk.

Pechan, Jos, Berechnung der Leistung u. des Dampfverbrauches der Zweicylinder-Dampfmaschinen zweistufiger Expansion. gr.8°. (XV, 289 S. m. 14 Fig. u. 48 Tab.) Wien, Deuticke. 8 Mk.

Rejtö, Alex., die innere Reibung der festen Körper als Beitrag zur theoretischen mech. Technologie. Aus dem Ung. übers. v. Karl Gaul. gr.8°. (VII, 111 S. m. 22 Taf.) Leipzig, Felix. 7 Mk.

Schenkel, Raim., der überhitzte Dampf. Darstellung seiner ausschliessl. Anwendg. in den gegenwärt. u. zukünft. Dampfbetrieben. gr 8⁰. (V, 132 S.) Wien, Spielhagen & Schurich. 2,80 Mk.

Schiemann, Max, Bau u. Betrieb elektrischer Bahnen. Anleitung zu deren Projektierg., Bau u. Betriebsführg. Strassenbahnen. Mit 364 Abbildgn., 2 photo-lith. Taf., 3 Taf. Diagramme u. mehreren Fig.-Taf. 2. Aufl. gr. 8⁰. (VIII, 392 S.) Leipzig, Leiner. 12 Mk.

Schmidt, Geo., die Wirkungsweise, Berechnung u. Konstruktion der Gleichstrom-Dynamomaschinen u. Motoren. Mit 204 Abbildgn., 33 Taf. Konstruktionsskizzen u. 1 Diagrammtaf. gr. 8⁰. (VIII, 272 S.) Ebd. 8,50 Mk.

Sicherheitsregeln f. elektrische Hochspannungs-Anlagen, hrsg. vom Verband deutscher Elektrotechniker. 12⁰. (23 S. m. Fig.) Berlin, Springer. Kart. 50 Pf.

Tuma, Jos., eine Quecksilberluftpumpe. gr. 8⁰. (8 S. m. 4 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 40 Pf.

Unterrichtsbriefe d. Elektrotechnik. 11.—20. Hft. Potsdam, Bonness & Hachfeld. à 60 Pf.

Vogel, H. W., Handbuch der Photographie. 4. Aufl. 4 Thle., enth. die photograph. Chemie, Optik, Praxis u. Kunstlehre. III. Thl. Die photograph. Praxis. 1. Abthlg.: Die photograph. Arbeitsräume u. Geräte. Der photograph. Negativprozess m. Kollodium u. Galaline-Emulsion. gr. 8⁰. (X. 310 S. 207 Illustr.) Berlin, Schmidt. 8 Mk

Voit, E. u. C. Heinke, elektrotechnisches Praktikum. Hilfsbuch f. Studirende der Elektrotechnik. 2. Thl. Heinke, C., Wechselstrommessungen u. magnetische Messungen. gr. 8⁰. (XXIII, 200 S. m 148 Fig.) Leipzig, Hirzel. Geb. 8 Mk.

Was brauche ich zum Photographieren? Leitfaden. gr. 8⁰. (IV, 84 S. m. Abbildgn. u. 1 Taf.) Düsseldorf, Liesegang. 75 Pfg.

Wiedemann, Eilh. u. Herm. Ebert, Physikalisches Praktikum m. besond. Berücksichtigung der physikalisch-chemischen Methoden. 3. Aufl. gr. 8⁰. (XXV, 490 S. m. 316 Holzst.) Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Exner, Frz. u. E. Haschek, über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. Wien, Gerold's Sohn. VII. Mittheilg. (enth. die Spectra v. *Pb*, *Zn*, *Sn*, *Cd*, *Al*, *Mg*). gr. 8⁰. (15 S. m. 6 Taf.) 1,90 Mk. VIII. Mittheilg. (enth. die Spectra v. *Te*, *Hg*, *Bi*, *Sb*, *C*). gr. 8⁰. (20 S. m. 2 Taf.) 1 Mk. IX. Mitth. (enth. die Spectra v. *K*, *Na*, *Ba*, *Bo*, *Fe*). gr. 8⁰. (27 S. m. 2 Taf.) 1,10 Mk.

Lauenstein, R., die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch f. den Schul- u. Selbstunterricht, sowie zum Gebrauch in der Praxis, nebst e. Anh., enth. Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge u. Kreisinhalte. 4. Aufl. gr 8°. (VI, 153 S. m. 9) Abbildgn.) Stuttgart, Bergsträsser. 3,50 Mk.; geb. 4,50 Mk.

Lommel, E., Theorie der Dämmerungsfarben. gr.4°. (60 S. m. 3 Fig.) München, G. Franz's Verl. 2,5) Mk.

Schweidler, A, über Rotationen im homogenen, elektrischen Felde. gr.8°. (7 S.) Wien, Gerold's Sohn. 20 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Anleitung zur Messung u. Aufzeichnung der Niederschläge. Hrsg. vom Königl. preuss. meteorologischen Institut. 3. Aufl. Lex.-8°. (12 S. m. 3 Holzschn.) Berlin, Asher & Co. 60 Pf.

Beobachtungsergebnisse der königl. Sternwarte zu Berlin. 7. Hft. Marcuse, Adf., Photographische Bestimmungen der Polhöhe. (29 S. m. 3 Fig.). gr.4°. Berlin, Dümmler's Verl. 3 Mk.

Bussler, Fr., die Elemente der mathematischen u. der astronomischen Geographie. Für die Prima höherer Lehranstalten bearb. gr.8°. (VI, 71 S. m. 24 Fig. u. 1 Sternkarte.) Dresden, Ehlermann. Geb. 1,50 Mk.

Cohn, Berth., über die Gauss'sche Methode, aus den Beobachtungen dreier gleicher Sternhöhen die Höhe, Zeit u. Polhöhe zu finden u. praktische Hilfsmittel zu ihrer Anwendung. gr.4°. (70 S. m. Fig., 2 Karten u. 2 Transparenten.) Strassburg, Singer. 4 Mk.

Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserhältnisse im deutschen Rheingebiet. Auf Veranlassg. der Reichskommission zur Untersuchg. der Stromverhältnisse des Rheins u. seiner wichtigsten Nebenflüsse u. auf Grund der v. den Wasserbaubehörden der Rheingebietsstaaten gelieferten Aufzeichnungen bearb. u. hrsg. v. dem Centralbureau f. Meteorologie u. Hydrographie im Grossherzogth. Baden. III. Hft. Die Anschwellgn. im Rhein, ihre Fortpflanzung im Strome nach Mass u. Zeit unter die Einwirkung der Nebenflüsse. Bearb. von M. v. Tein. Mit 10 Taf. IV. Hft. Auftreten u. Verlauf des Hochwasser vom März–April 1895. Bearb. von M. v. Tein. Mit 5 Taf. Fol. (V, 91, 57 S.) Berlin, Ernst & Sohn. Kart. 24 Mk.

Eschenhagen, M., über schnelle periodische Veränderungen des Erdmagnetismus v. sehr kleiner Amplitude. gr.8°. (9 S. m. 1 Taf.) Berlin, Reimer. 50 Pf.

Fritsche, H., über die Bestimmung der Coefficienten der Gaussschen allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus f. d. J. 1885 u. üb.

den Zusammenhang der drei erdmagnetischen Elemente untereinander. gr.8°. (85 autogr. S.) St. Petersburg (Strelniuskaya ulitzka 4), Selbstverlag. — Ratzeburg, Fräulein Louise Fritsche. 4 Mk.

Homén, Thdr., der tägliche Wärmeumsatz im Boden u. die Wärmestrahlung zwischen Himmel u. Erde. gr.4°. (147 S. m. 5 Abbildgn. u. 10 lith. Taf.) Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

Jäger, Gust., die Lösung der Mondfrage. gr.8°. (III, 59 S. m. 1 Taf.) Stuttgart, Kohlhammer. 2 Mk.

Jahrbuch. deutsches meteorologisches, f. 1896. Beobachtungssystem der meteorolog. Stationen I. Ordnung. Aachen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. an der Station I. Ordng. Aachen u. deren Nebenstationen im J. 1896. Hrsg. im Auftrage der Stadtverwaltg. v. Dir. P. Polis. II. Jahrg. gr.4°. (VI, 74 S. m. 4 Abbildgn. u. 1 Taf.) Karlsruhe, Braun. 5 Mk.

König, Arth., die Abhängigkeit der Farben- u. Helligkeitsgleichungen v. der absoluten Intensität. gr.8°. (12 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Mangoldt, H., Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(k)}{k} = 0$. gr.8°. (18 S.) Ebd. 1 Mk.

Meyer, Wilh., das Weltgebäude. Eine gemeinverständl. Himmelskunde. Mit etwa 325 Abbildgn. im Text, 9 Karten u. 29 Taf. in Farbendr. Heliograv. u. Holzsch. (In 14 Hftn.) 1. Hft. gr.8. (S. 1—48.) Leipzig, Bibliograph. Institut. 1 Mk.

Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 36. XI. Bd 3. Stück. Wilsing, J., Untersuchungen üb. d. Parallaxe u. die Eigenbewegung v. 61 Cygni nach photographischen Aufnahmen. gr.4°. (59 S. m. 2 Taf.) Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Soland, unser Sonnensystem. gr.8°. (59 S. m. 2 Taf.) Leipzig, Strauch. 2 Mk.

Spitaler, R., die Ursache der Breitenschwankungen. gr.4°. (19 S. m. 1 Fig. u. 1 Karte.) Wien, Gerold's Sohn. 1,40 Mk.

Stichternoth, Alb., Untersuchung über die Bahn des Cometen 1822 IV. gr.4°. (VI, 64 S.) Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Hrsg. durch Wilhl. v. Bezold. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung im J. 1893, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch f. 1893. Beobachtungssystem des Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. (1893. 3. Hft.) gr 4°. (XVI u. S. 99–291 m. 1 farb. Karte.) Berlin, Asher & Co. 9 Mk.

— , dass. Ergebnisse der Gewitter-Beobachtungen in den J. 1892, 1893, 1896. gr.4°. (XXI, 57 S. m. 3 Abbilfign.) Ebd. 3 Mk.

Vierteljahrsschrift der astrom. Gesellschaft. 32. Jahrg. 1. u. 2. Hft. Leipzig, Engelmann. à 2 Mk.

Nautik.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Taf. f. d. J. 1900 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Hrsg. vom Reichsamt des Innern. Unter Red. v. Dr. Schrader. gr 8°. (XXXII, 276 S.) Berlin C. Heymann's Verl. Kart. 1,50 Mk.

— , kleines nautisches, f. 1898. 37. Jahrg.. Hrsg. W. Ludolph 12°. (52 S.) Bremen, Heinsius. 75 Pf.

Leitfaden f. den Unterricht in der Navigation. 2. Aufl. (X, 370 S. m. 132 Abbildgn. u. 8 Steindr. Taf.) Nebst Anh.: Nautische Rechngn. 4°. (VIII, 139 S. m. Abbildgn.) Berlin, Mittler & Sohn. 15,50 Mk., Leitfaden allein 11 Mk.; Anhang allein 4 Mk.

Segelhandbuch des Irischen Kanals. II. Tl. Die Ostseite. Hrsg. v. der Direktion der deutschen Seewarte. gr. 8°. (XXIX, 462 S.) Hamburg, Friederichsen & Co. Kart. 3 Mk.

Physik.

Börner, H., physikalisches Unterrichtswerk f. höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung der neueren Physik in 2 Stufen. 2. Stufe: IV. Lehrbuch der Physik f. die 3 oberen Klassen der Realgymnasien u. Ober-Realschulen, sowie zur Einführg. in das Studium der neueren Physik. gr. 8°. 2. Aufl. (XIII, 488 S.) m. 365 Abildgn. Berlin, Weidmann. Geb. 6 Mk.

Diesel, u. M. Schröter, Diesels rationeller Wärmemotor. 2 Vorträge. (gr. 4°. 19 S. m. 17 Taf.) Berlin, Springer. 1,40 Mk.

Ernst, Ch., eine Theorie des elektrischen Stromes auf Grund des Energieprincipes. gr. 8°. (64 S. m. 6 Fig.) München, Lüneburg. 2 Mk.

Ferraris, G. u. R. Arnò: ein neues System zur elektrischen Vertheilung der Energie mittelst Wechselströmen. Uebers. v. Carl Heim. 2. Aufl. gr. 8°. (31 S. m. 14 Abbildgn.) Weimar, Steinert. 1,35 Mk.

Götz, Hans, Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauche an Realschulen u. verwandten Lehranstalten. 4. Aufl. Mit 291 in den Text gedr. Fig. u. zahlreichen Uebungsaufgaben. gr. 8°. (VIII, 420 S.) München, Franz' Verl. Geb. 4 Mk.

Graham, Will. P.. über den Verlauf des Potentialgradienten in Geissler'schen Röhren. gr. 8⁰. (32 S. m. 7 Taf.) Berlin, Mayer & Müller. 1,60 Mk.

Graetz, L., kurzer Abriss der Elektricität. gr. 8⁰. (VI, 183 S. m. 143 Abbildgn.) Stuttgart, Engelhorn. Geb. 3 Mk.

Haase, Heinr., kritische Betrachtung üb. die Navirische Bogentheorie u. die neuere Elasticitätstheorie kontinuirlicher Fachwerkstragbögen. Mit 1 Blatte graph. Darstellgn. gr. 8⁰. (IV, 74 S.) Regensburg. Bauhof. 1,80 Mk.

— , das Grundgesetz des Horizontalschubs versteifter Tragbögen kontinuirlichen Systems, statisch-mathematisch u. experimentell nachgewiesen. Mit Autotyp. des Autors u. des Versuchsapparates. Textfig. u. 5 Blättern graph. Darstellgn. nach Handzeichngn. des Autors. gr. 8⁰. (VIII, 102 S. m. Bildnis.) Ebd. 3 Mk.

Haschek, Ed., über galvanische Polarisation in alkoholischen Lösungen. gr. 8⁰. (10 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 30 Pf.

Januschke, Hans, das Princip der Erhaltung der Energie u. seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hülfsbuch f. den höheren Unterricht. gr. 8⁰. (X, 455 S. m. 95 Fig.) Leipzig, Teubner. Geb. 12 Mk.

Jaumann, G., über die Interferenz u. die elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen. gr. 8⁰. (18 S. m. 8 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 50 Pf.

Krauss, Fritz, graphische Kalorimetrie der Dampfmaschinen. gr. 8⁰. (VI, 87 S. m. 24 Fig. im Text u. auf 1 Taf.) Berlin, Springer. 2 Mk.

Lommel, E., Lehrbuch der Experimentalphysik. Mit 430 Fig. im Text u. 1 farb. Spektraltaf. 4. Aufl. gr. 8⁰. (IX, 558 S.) Leipzig, Barth. 6,40 Mk.

Mache, Heinr., Bestimmungen der specifischen Wärme einiger schwer schmelzbaren Metalle. gr. 8⁰. (4 S.) Wien, Gerold's Sohn. 10 Pf.

Meyn, Rich., die absoluten mechanischen, calorischen magnetischen elektrodynamischen u. Licht-Maass-Einheiten, nebst deren Ableitgn., wichtigsten Beziehgn. n. Messmethoden, m. e. Anh. nichtmetr. Maasse, zum Gebrauche f. Ingenieure, Techniker, Lehranstalten, sowie f. e. gebildetes Publicum in gedrängter Kürze bearb. gr. 16⁰. (VII, 44 S.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1 Mk.

Miller, Andr., ‚das magnetische Kraftfeld e. bipolaren Stabes gr. 8⁰. (22 S. m. 1 Fig.) München, Kellerer. 1 Mk.

Pallich, J., über Verdunstung aus e. offenen kreisförmigen Becken. gr. 8⁰. (27 S. m. 3 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 60 Pf.

Reis, Paul, Elemente der Physik, Meteorologie u. mathemaschen Geographie. Hilfsbuch f. den Unterricht an höheren Lehr-

anstalten. Mit zahlreichen Uebungsfragen- u. Aufgaben. 6. Aufl. v. Ed. Penzold. gr. 8⁰. (VIII, 437 S.) Leipzig, Quandt & Händel. 4,50 Mk.

Schmidt, K. E. F., über die Ablenkung der Kathodenstrahlen durch elektrische Schwingungen. 1. u. 2. Mittheilg. gr. 8⁰. 1. (9 S. m. 1 Fig., 1 Taf. u. 1 Bl. Erklärgn.) — 2. Grundgesetz f. die Ablenkung der Strahlen. (21 S. m. 6 Fig.) Halle, Niemeyer. à 1 Mk.

Schollmeyer, G., was muss der Gebildete v. der Elektrizität wissen? Gemeinverständliche Belehrung üb. die Kraft der Zukunft. 6. Aufl. gr. 8⁰. (III, 96 S. m. Abbildgn.) Neuwied, Heuser's Verl. 1,50 Mk.

Sumpf's, K., Schulphysik. Methodisches Lehr- u. Uebungsbuch f. höhere Schulen in 3 Lehrstufen. 6. Aufl. bearb. v. A. Pabst. Mit 512 in den Text gedr. Abbildgn. u. 1 Spektraltaf. in Farbendr. gr. 8⁰. (VIII, 402 S.) Hildesheim, Lax. 4,50 Mk.

Thompson, Silvanus P., Elementare Vorlesungen üb. Elektrizität u. Magnetismus. Deutsch auf Grund der neuesten Aufl. des Originals v. A. Himstedt. 2. Aufl. gr. 8⁰. (VIII, 604 S. m. 283 Abbildgn.) Tübingen, Laupp. 7 Mk.

Thomson, J. J., Elemente der mathematischen Theorie der Elektricität u. des Magnetismus. Deutsche Ausg. v. Prof. Gust Wertheim. gr. 8⁰. (XIII, 414 S. m. 133 Abbildgn.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 8 Mk.

Tuma, Jos., ein Phasenmessapparat f. Wechselströme. gr. 8⁰. (5 S. m. 3 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 30 Pf.

— , ein Phasenmessinstrument f. Wechselströme. gr. 8⁰. (11 S. m. 3 Fig.) Ebd. 50 Pf.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsch. v. E. Gumlich, W. Jaeger, St. Lindeck. 2. Tl.: Akustik u. Optik. 2. Bd. Geometrische Optik. gr. 8⁰. (VII, u. S. 399—675 m. 270 Fig.) Berlin, Springer. 8 Mk.

Warburg, Emil, Lehrbuch der Experimentalphysik f. Studirende. Mit 405 Orig.-Abbildgn. im Text. 3. Aufl. gr. 8⁰. (XX, 395 S.) Freiburg i./Br., Mohr. 7 Mk.

Weiler, W., Wörterbuch der Elektricität u. des Magnetismus Mit vielen Abbildgn. (In ca. 16 Heften.) 1. u. 2. Hft. Lex.-8⁰. Leipzig, Schäfer. à 75 Pf.

Wilke, Artr., die Elektricität, ihre Erzeugung u. ihre Anwendung. 3. Aufl. Mit 10 Taf. u. 828 Text-Illustr. gr. 8⁰. (VII, 637 S.) Leipzig, O. Spamer. 8,50 Mk.

Wulf, Thdr., S. J., Beobachtungen an geschlossenen Clark-schen Normalelementen. gr. 8⁰. (18 S. m. 6 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 50 Pf.

Wüllner, Adph., Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. Aufl.

3. Bd. Die Lehre vom Magnetismus u. v. der Elektricität m. e. Einleitung. Grundzüge der Lehre vom Potential. gr. 8°. (XV, 1414 S. m. 341 Abbildgn. u. Fig.) Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Vermischte Schriften.

Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss. Mathemat.-phys. Classe. 1897. III. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 7. Hft. Red. v. Sieveking, Schröder u. Busche. gr. 8°. (S. 273—317.) Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Scheffler, Herm., vermischte mathematische Schriften, enth. 1. Zusätze zur Theorie der Gleichungen. 2. Die quadratische Zerfällung der Zahlen. 3. Die Phönixzahlen. gr. 8°. (103 S.) Braunschweig, Wagner. 2 Mk.

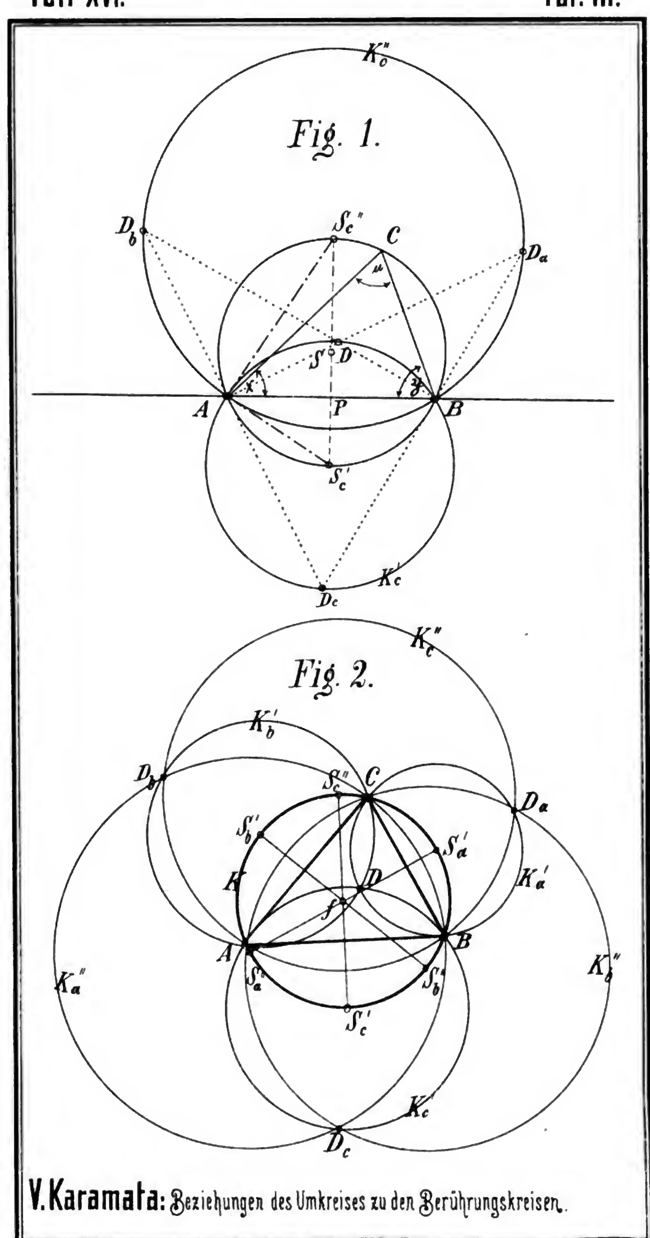
Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1896. 2 Bde. Mit 27 Taf. u. 58 Holzschn. gr. 8°. (XI, 1064 S.) Prag, Řivnáč. 20 Mk.

— Münch., mathemat. Classe. 1897. 1. Hft. München, Franz' Verl. 1,20 Mk.

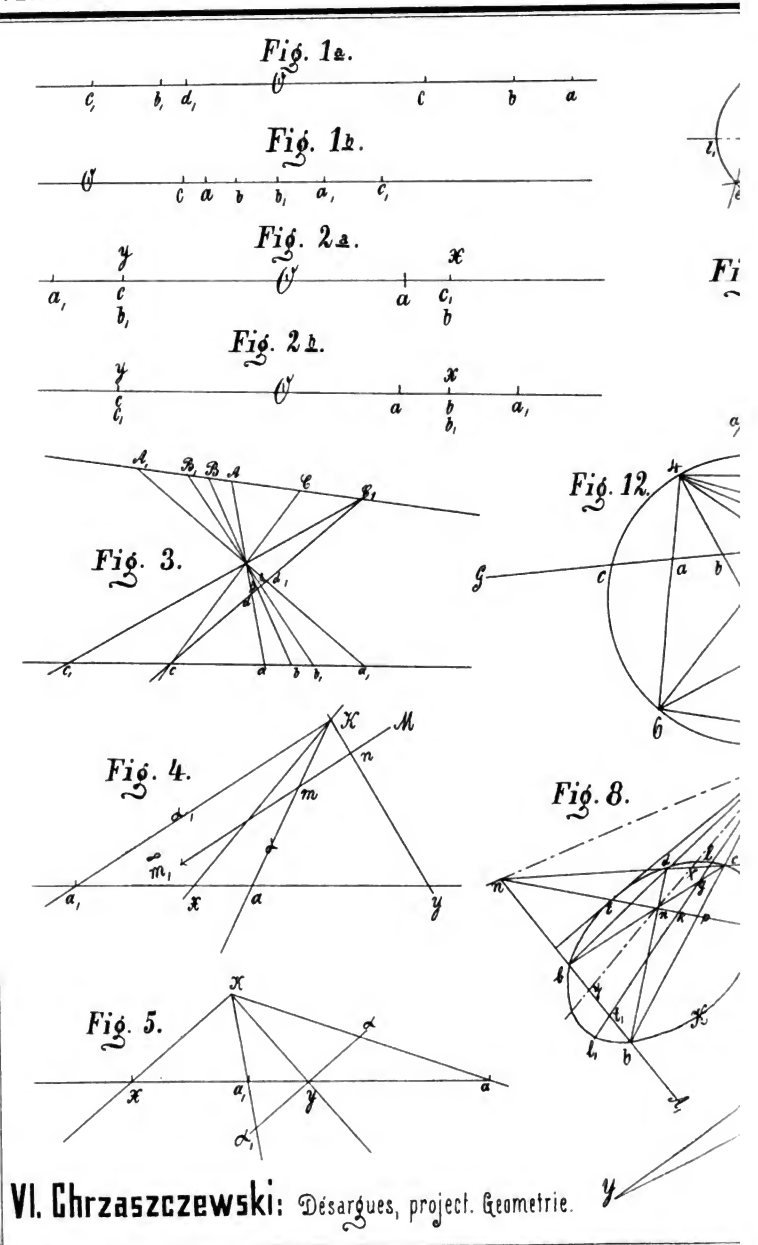
— Wiener, math.-naturw. Classe. Wien, Gerold's Sohn. 1. Abthlg. 106. Bd. 1.—3. Hft. 3,40 Mk. Abth. IIa. 106. Bd. 1.—4. Hft. 8,30 Mk. — Abthl. IIb. 106. Bd. 1.—3. Hft. 3,20 Mk.

— , dass. Register zu den Bdn. 101.—105. XIV. gr. 4°. (VII, 144 S.) Ebd. 1,90 Mk.

Veröffentlichungen des königl. astronomischen Rechen-Instituts zu Berlin. Nr. 5.: Bauschinger, J., Genäherte Oppositions-Ephemeriden v. 78 kleinen Planeten f. 1897 August bis December. Unter Mitwirkg. mehrerer Astronomen, insbesondere der Herren A. Berberich u. P. Neudebauer hrsg. 4°. (26 S.) Berlin, Dümmler's Verl. 1,20 Mk.



V. Karamata: Beziehungen des Umkreises zu den Berührungskreisen.



VI. Chrzaszczewski: Désargues, project. Geometrie.

Taf. IV.

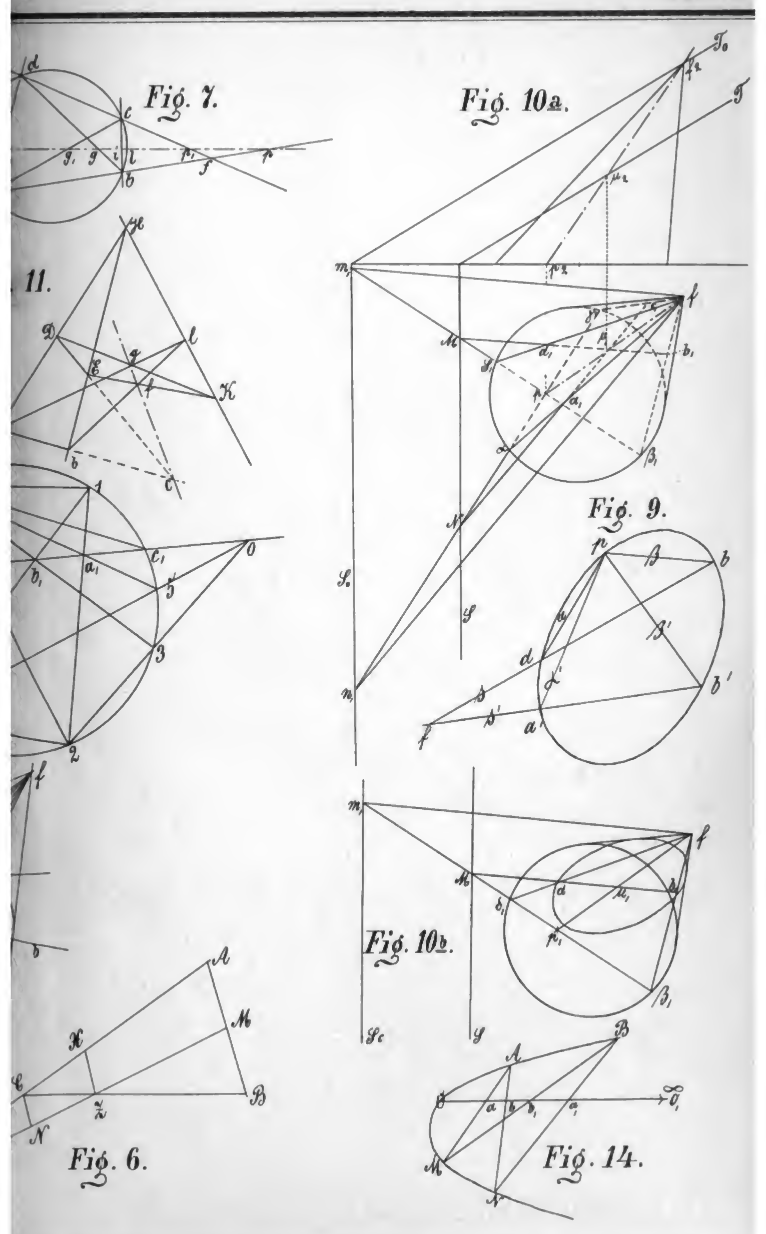


Fig. 7.

Fig. 10a.

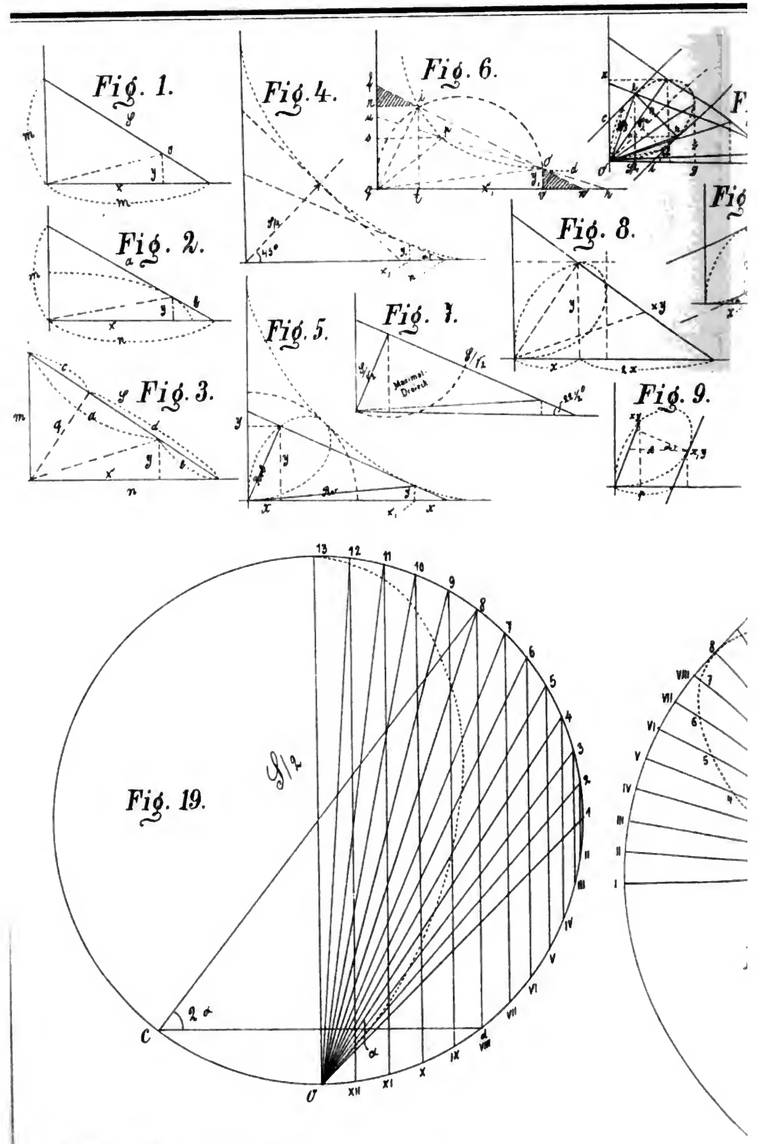
11.

Fig. 9.

Fig. 10b.

Fig. 6.

Fig. 14.



VII. Meyer: Begrenzungscurve.

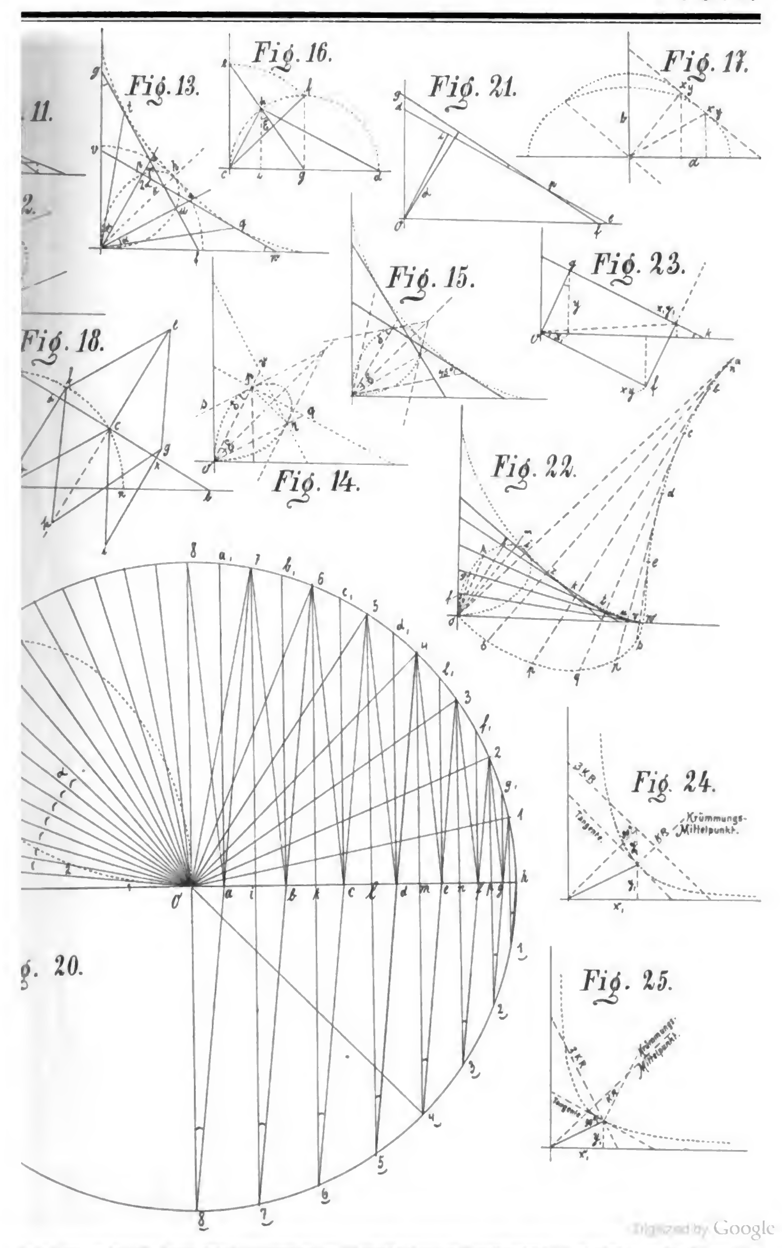


Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Krümmungs-Mittelpunkt.
Tangente.
Fig. 25.
Krümmungs-Mittelpunkt.
Tangente.





